REVUE DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
Tome I, 1956, N° 3,

FAMILLES DE QUADRIQUES ATTACHÉES À DES CONGRUENCES W*)

PAR

LUCIEN GODEAUX

(Liége)

Nos recherches sur la Géométrie projective différentielle des surfaces nous ont conduit à attacher à chaque droite d'une congruence W une suite de quadriques telle que deux quadriques consécutives se touchent en quatre points, caractéristiques pour chacune de ces quadriques [1] — [5]. Ensuite, nous avons attaché à deux congruences W ayant une surface focale commune une suite de quadriques possédant des propriétés analogues [6]—[7]. Après avoir rappelé la formation de ces suites, nous construisons une nouvelle suite de quadriques ayant encore les mêmes propriétés et attachée à trois congruences W ayant une nappe focale commune. Cela nous conduit à considérer une suite de Laplace dont les points appartiennent à des plans déterminés par trois points consécutifs d'une autre suite de Laplace.

Observons que l'on pourrait également attacher une suite de quadriques à quatre ou à cinq congruences W ayant une nappe focale commune.

1. Soient (j) une congruence W, (x) et $(\bar{x})$ ses nappes focales, u, v, les paramètres des asymptotiques sur ces deux surfaces. A cette congruence, nous attachons dans l'espace S_5 quatre suites de Laplace.

Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique de Klein Q de S_5 qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v, de la surface (x), en un point x. On sait (Tzitzeica, Bompiani) que ces points sont transformés de Laplace l'un de l'autre et sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \qquad (L)$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

*) Communication faite au IV^e Congrès des Mathématiciens Roumains. Bucarest, 27 mai—4 juin 1956.

A la surface $(\bar{x})$ est de même associée une suite de Laplace

$$\ldots, \bar{U}_n, \ldots, \bar{U}_1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_n, \ldots \qquad (\bar{L})$$

analogue à la précédente.

Les droites UV, $\bar{U}\bar{V}$ appartiennent à Q et se coupent en un point J, image de la droite j, qui engendre un réseau conjugué (DARBOUX). Le point J appartient à une suite de Laplace

$$\ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots \qquad (\mathfrak{J})$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u et qui est inscrite dans les suites L, $\bar{L}$. Le point J_n est l'intersection des droites $U_{n-1}U_n$ et $\bar{U}_{n-1}\bar{U}_n$; le point J_{-n} est l'intersection des droites $V_{n-1}V_n$ et $\bar{V}_{n-1}\bar{V}_n$.

Désignons par P la seconde image du complexe linéaire osculateur à la congruence (j) le long de j, c'est-à-dire le pôle par rapport à Q de l'hyperplan $J_2J_1JJ_{-1}J_{-2}$. Ce point décrit également un réseau conjugué et appartient à une suite de Laplace

$$\ldots, P_n, \ldots, P_1 P, P_{-1}, \ldots, P_{-n}, \ldots \qquad (\mathfrak{L})$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u et qui est circonscrite aux suites L, $\bar{L}$.

Le point P_n est le pôle par rapport à Q de l'hyperplan

$$J_{-n-2}\,J_{-n-1}\,J_{-n}\,J_{-n+1}\,J_{-n+2}$$

et appartient aux droites $U_{n-1}\bar{U}_{n-1}$, $U_n\bar{U}_n$. Le point P_{-n} est le pôle de l'hyperplan

$$J_{n-2}\,J_{n-1}\,J_n\,J_{n+1}\,J_{n+2}$$

et est l'intersection des droites $V_{n-1}\bar{V}_{n-1}$, $V_n\bar{V}_n$.

2. Les plans $J_nJ_{n+1}J_{n+2}$ et $P_{-n}P_{-n-1}P_{-n-2}$ étant conjugués par rapport à Q, coupent cette hyperquadrique suivant deux coniques dont les points représentent les génératrices rectilignes de deux demi-quadriques de même support Ψ_n.

Nous obtenons ainsi une suite de quadriques

$$\ldots, \Psi_n, \ldots, \Psi_0, \Psi, \Psi_{-0}, \ldots, \Psi_{-n}, \ldots$$

La quadrique Ψ, qui correspond aux plans J_1JJ_{-1} et $P_{-1}PP_1$, est dégénérée en deux plans: les plans focaux de la droite j.

Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points, caractéristiques pour chacune de ces quadriques.

Les quadriques Ψ_0, Ψ_{-0} touchent les surfaces (x), $(\bar{x})$ aux points x, $\bar{x}$ et chacun de ces points compte pour deux points caractéristiques.

3. Considérons maintenant deux congruences W ayant une nappe focale commune (x). Soient (j'), (j'') ces deux congruences, (x'), (x'') leurs secondes surfaces focales. Nous désignerons par L, L', L'', $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{J}''$, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$ les suites de Laplace de S_5 attachées à ces congruences.

Désignons par A l'intersection des droites $J'J_1'$, $J''J_1''$ et par B l'intersection des droites $J'J_{-1}'$, $J''J_{-1}''$.

Lorsque u varie, les droites $J'J_1'$, $J''J_1''$ engendrent des développables dont les plans tangents sont respectivement $J_1'J'J_{-1}'$ et $J_1''J''J_{-1}''$, Il en résulte que la tangente en A à la courbe u tracée sur la surface (A) passe par B. On démontre de la même manière que la tangente en B à la ligne v tracée sur la surface (B) passe par A. Par conséquent, les points A, B sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

Nous désignerons par A_n le point d'intersection des droites $J_n'J_{n+1}'$, $J_n''J_{n+1}''$ et par B_n celui des droites $J_{-n}'J_{-n-1}'$, $J_{-n}''J_{-n-1}''$. Nous obtenons ainsi une suite de Laplace

$$\ldots, A_n, \ldots, A_1, A, B, B_1, \ldots, B_n, \ldots \qquad (\mathfrak{A})$$

inscrite dans les suites $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{J}''$.

La section de Q par le plan $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ représente une demi-quadrique de support Δ_n et la section de Q par le plan $B_nB_{n+1}B_{n+2}$ représente une demi-quadrique de support Δ_{-n}. En considérant la suite polaire $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$ par rapport à Q, suite qui est circonscrite aux suites $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$, on voit aisément que le plan conjugué de $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ est $V_{n+1}V_{n+1}'V_{n+1}''$ et que celui de $B_nB_{n+1}B_{n+2}$ est $U_{n+1}U_{n+1}'U_{n+1}''$.

La quadrique Δ_0 correspond aux plans AA_1A_2 et $V_1V_1'V_1''$, la quadrique Δ_{-0} aux plans BB_1B_2 et $U_1U_1'U_1''$. Nous désignerons par Δ_0' la quadrique qui correspond aux plans BAA_1 et $VV'V''$, par Δ_{-0}' celle qui correspond aux plans ABB_1 et $UU'U''$. Ces deux dernières quadriques ont été rencontrées par Demoulin et possèdent des propriétés intéressantes.

Nous obtenons ainsi une suite de quadriques

$$\ldots, \Delta_n, \ldots, \Delta_0, \Delta_0', \Delta_{-0}', \Delta_{-0}, \ldots, \Delta_{-n}, \ldots;$$

Deux quadriques consécutives de cette suite se touchent en quatre points, qui sont caractéristiques pour les deux quadriques.

4. Considérons trois congruences W: (j'), (j''), (j''') ayant une nappe focale commune (x) et soient (x'), (x''), (x''') les secondes nappes focales de ces congruences. Appelons $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{J}''$, $\mathfrak{J}'''$, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$, $\mathfrak{L}'''$ les suites de Laplace qui leur sont associées dans S_5. Nous supposerons que le point J''' sur la droite UV n'est pas une combinaison linéaire à coefficients constants des points J', J'', auquel cas les droites $J'J_1'$, $J''J_1''$, $J'''J_1'''$ passeraient par un même point.

Les plans $J_1'J'J_{-1}'$, $J_1''J''J_{-1}''$, $J_1'''J'''J_{-1}'''$ se rencontrent en un point M, les plans $J_2'J_1'J'$, $J_2''J_1''J''$, $J_2'''J_1'''J'''$ en un point M_1. Lorsque u varie, ces trois derniers plans engendrent des variétés ayant le caractère de développables et les espaces S_3 qui leur sont respectivement tangents le long de ces plans sont $J_2'J_1'J'J_{-1}'$, $J_2''J_1''J''J_{-1}''$, $J_2'''J_1'''J'''J_{-1}'''$. Il en résulte que la tangente en

M_1 à la courbe u tracée sur la surface (M_1) passe par M. On démontre de la même manière que la tangente en M à la courbe v tracée sur la surface (M) passe par M_1. Par conséquent, les points M, M_1 sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

Plus généralement, appelons M_{n+1} l'intersection des plans $J'_n J'_{n+1} J'_{n+2}$, $J''_n J''_{n+1} J''_{n+2}$, $J'''_n J'''_{n+1} J'''_{n+2}$ et M_{-n-1} l'intersection des plans $J'_{-n} J'_{-n-1} J'_{-n-2}$, $J''_{-n} J''_{-n-1} J''_{-n-2}$, $J'''_{-n} J'''_{-n-1} J'''_{-n-2}$. Nous obtenons ainsi une suite de Laplace

$$\ldots, M_n, \ldots, M_1, M, M_{-1}, \ldots, M_{-n}, \ldots \qquad (\mathfrak{M})$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

L'intersection du plan $M_n M_{n+1} M_{n+2}$ avec Q représente une demi-quadrique de support Ω_n et l'intersection du plan $M_{-n} M_{-n-1} M_{-n-2}$ avec Q une demi-quadrique de support Ω_{-n}. On a ainsi une nouvelle suite de quadriques

$$\ldots, \Omega_n, \ldots, \Omega_1, \Omega\, \Omega_{-1}, \ldots, \Omega_{-n}, \ldots ;$$

deux quadriques consécutives se touchant en quatre points, caractéristiques pour chacune de ces quadriques.

Désignons par A' l'intersection des droites $J'' J''_1$, $J''' J'''_1$, par A'' l'intersection des droites $J''' J'''_1$, $J' J'_1$, enfin par A''' celle des droites $J' J'_1$, $J'' J''_1$. Ces points appartiennent à des suites de Laplace analogues à celle que nous avons considérée au N° 3 et nous les désignerons par $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$. La suite $\mathfrak{M}$ est inscrite dans les suites $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$. Le point M_1 par exemple appartient aux droites $A' A'_1$, $A'' A''_1$, $A''' A'''_1$.

La suite polaire de la suite $\mathfrak{M}$ par rapport à Q est circonscrite aux suites polaires des suites $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$.

Observons que le plan $M_n M_{n+1} M_{n+2}$ appartient à l'espace à trois dimensions $A'_{n-1} A'_n A'_{n+1} A'_{n+2}$. Les plans conjugués des plans $A'_{n-1} A'_n A'_{n+1}$ et $A'_n A'_{n+1} A'_{n+2}$ sont respectivement $V_n V''_n V'''_n$ et $V_{n+1} V''_{n+1} V'''_{n+1}$. Ces plans ont en commun les points P''_{-n-1}, P'''_{-n-1} et la droite $P''_{-n-1} P'''_{-n-1}$ est conjuguée de $A'_{n-1} \ldots A'_{n+2}$.

De même, le plan $M_n M_{n+1} M_{n+2}$ appartient à l'espace $A''_{n-1} \ldots A''_{n+2}$ dont la droite conjuguée est $P'''_{-n-1} P'_{-n-1}$. On en conclut que les plans $M_n M_{n+1} M_{n+2}$ et $P'_{-n-1} P''_{-n-1} P'''_{-n-1}$ sont conjugués par rapport à Q.

En particulier, les plans $M_1 M M_{-1}$ et $P'P''P'''$ sont conjugués par rapport à Q et la quadrique Ω est le lieu des droites communes aux complexes linéaires osculateurs aux congruences (j'), (j''), (j''').

5. On pourrait également considérer quatre (ou cinq) congruences W ayant une surface focale commune et les points communs aux groupes de quatre (ou de cinq) espaces à trois (ou quatre) dimensions, détérminés par quatre (ou cinq) points consécutifs de chacune des suites de Laplace analogues à $\mathfrak{J}$ [8].

Liége, le 10 mai 1956.

BIBLIOGRAPHIE

1. Lucien Godeaux, *Sur quelques familles de quadriques attachées aux points d'une surface*. Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, 1928, 213–226.
2. — *La théorie des surfaces et l'espace réglé*. Actualités scientifiques, Hermann, Paris, 1934, *138*.
3. — *Alcune osservazioni sulle congruenze W*. Rendiconti del Seminario Matematico di Torino, 1953–1954, 39–46.
4. — *Sur quatre suites de Laplace associées à une congruence W*. Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1954, 880–885.
5. — *Sulle congruenze W*. Rendiconti di Matematica di Roma, 1956, 36 – 45.
6. — *Sur la transformation de Guichard et sur certaines quadriques considérées par M. Demoulin*. Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1929, 955–958.
7. — *Congruenze W e trasformazioni di Guichard*. Rendiconti del Seminario di Messina, 1957, 1 – 12.
8. — *Sur certaines suites de Laplace associées à une suite de Laplace donnée*. Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1930, 264–273.