465472B(20) 20

EXTRAIT DE *Mathesis*, Tome LXIV, 1955.

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE,

par Lucien GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liège.

Nous considérons dans cette note une équation différentielle d'ordre n que l'on peut écrire symboliquement sous la forme

$$(y + ax)^n = 0,$$

en développant le premier membre suivant la formule du binome, les exposants de y étant remplacés par des indices de dérivation et le dernier terme étant multiplié par y. Nous montrerons que son intégration peut être ramenée à celle d'une équation linéaire à coefficients constants.

Cette équation a déjà été considérée par plusieurs auteurs, soit dans des cas particuliers, soit même, tout récemment, sous une forme plus générale. Nous en donnerons la bibliographie à la fin de cette note. Nous estimons utile de publier cette dernière, la méthode que nous utilisons étant très simple.

Pour $n = 2$, $a = \pm 1$, on retrouve l'équation qui fait l'objet de la question **3484** (M, 1951-359, 1952-152) et pour $n = 3$, $a = 1$, celle qui fait l'objet de la question **3517** (M, 1951-232 ; 1955-172).

1. Considérons l'équation

$$y^{(n)} + \binom{n}{1} axy^{(n-1)} + \dots + \binom{n}{p} a^p x^p y^{(n-p)} + \dots + a^n x^n y = 0, \quad (1)$$

où a est une constante. Nous représenterons le premier membre de cette équation par $F_n(y)$.

Formons l'expression $F_n'(y) + axF_n(y)$. Un calcul simple montre que l'on a

$$F_n'(y) + axF_n(y) = F_{n+1}(y) + naF_{n-1}(y). \quad (2)$$

Posons maintenant

$$y = \varphi(x) = e^{-\frac{ax^2}{2}}.$$

On trouve sans difficulté que l'on a

$$F_1(\varphi) = 0, \quad F_2(\varphi) = -a\varphi, \quad F_3(\varphi) = 0, \quad F_4(\varphi) = 3a^2\varphi,$$
$$F_5(\varphi) = 0, \quad F_6(\varphi) = -3\cdot 5a^3\varphi.$$

Nous sommes donc conduit à poser

$$F_{2m-1}(\varphi) = 0, \qquad F_{2m}(\varphi) = (-1)^m(2m-1)!!\, a^m\varphi, \quad (3)$$

UNIVERSITE DE LIEGE BIBLIOTHEQUE

où nous représentons par $(2m-1)!!$ le produit des $2m-1$ premiers nombres impairs.

Supposons ces formules établies pour une valeur déterminée de m et pour les valeurs inférieures. La relation (2), pour $n=2m$, donne

$$F_{2m+1}(\varphi) = F'_{2m}(\varphi) + axF_{2m}(\varphi),$$

c'est-à-dire

$$F_{2m+1}(\varphi) = (-1)^m(2m-1)!!\,a^m(\varphi' + ax\varphi) = 0.$$

La première des formules (3) est donc vraie quel que soit m.

Posons maintenant, dans la relation (2), $n = 2m+1$; nous avons

$$F'_{2m+1}(\varphi) + axF_{2m+1}(\varphi) = F_{2m+2}(\varphi) + (2m+1)aF_{2m},$$

d'où

$$F_{2m+2}(\varphi) = -(2m+1)a(-1)^m(2m-1)!!\,a^m\varphi,$$

$$F_{2m+2}(\varphi) = (-1)^{m+1}(2m+1)!!\,a^{m+1}\varphi.$$

La seconde des formules (3) est donc également vraie quel que soit m.

Notons en passant, ce que l'on retrouvera plus loin, que l'équation $F_{2n-1}(y) = 0$ admet l'intégrale particulière $y = \varphi$.

2. Posons, dans l'équation (1), $y = \varphi z$. Formons le coefficient de $z^{(p)}$. Dans le premier terme, nous trouvons $\binom{n}{p}\varphi^{(n-p)}$, dans le second, $\binom{n-1}{p}\varphi^{(n-1-p)}$ et plus généralement, dans le terme de rang q,

$$\binom{n-q}{p}\varphi^{(n-q-p)},$$

où l'on doit supposer $q \leqslant n-p$. En tenant compte des coefficients de l'équation (1), on trouve donc que le coefficient de $z^{(p)}$ est

$$\Sigma\binom{n}{q}\binom{n-q}{p}\varphi^{(n-q-p)}a^q x^q,$$

q variant de 0 à $n-p$.

On a

$$\binom{n}{q}\binom{n-q}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{q}$$

et le coefficient s'écrit

$$\binom{n}{p}\Sigma\binom{n-p}{q}\varphi^{(n-q-p)}a^q x^q,$$

c'est-à-dire

$$\binom{n}{p} F_{n-p}(\varphi).$$

L'équation (1) devient donc

$$zF_n(\varphi) + \binom{n}{1} z' F_{n-1}(\varphi) + \dots + \binom{n}{1} z^{(n-1)} F_1(\varphi) + z^{(n)} F_0(\varphi) = 0. \quad (4)$$

3. Supposons n pair, ou encore, remplaçons dans l'équation (4) n par $2n$ et tenons compte du fait que $F_k(\varphi)$ est nul pour k impair. On obtient

$$zF_{2n}(\varphi) + \binom{2n}{2} z'' F_{2n-2}(\varphi) + \dots + \binom{2n}{2p} z^{(2p)} F_{2n-2p}(\varphi) +$$
$$+ \dots + z^{(2n)} F_0(\varphi) = 0.$$

En remplaçant maintenant $F_{2n}(\varphi)$, $F_{2n-2}(\varphi)$, ... par leurs valeurs et en supprimant le facteur commun φ, certainement différent de zéro, on obtient finalement

$$z^{(2n)} - \binom{2n}{2} a z^{(2n-2)} + \dots + (-1)^{n-p} \binom{2n}{2p} (2n - 2p - 1)!!\, a^{n-p} z^{(2p)} +$$
$$+ \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n}{2} (2n-3)!!\, a^{n-1} z'' + (-1)^n (2n-1)!!\, a^n z = 0.$$

Dans le cas où n est pair, on ramène donc bien l'intégration de l'équation (1) à celle d'une équation de même ordre, à coefficients constants.

L'équation caractéristique de l'équation différentielle précédente s'obtient en remplaçant $z^{(i)}$ par r^i. Si nous posons

$$\rho = \frac{r^2}{a},$$

cette équation caractéristique devient

$$\rho^n - \binom{2n}{2} \rho^{n-1} + \dots + (-1)^{n-p} \binom{2n}{2p} (2n - 2p - 1)!!\, \rho^p +$$
$$+ \dots + (-1)^n (2n-1)!! = 0.$$

La transformée en $-\rho$ de cette équation n'admet que des permanences, donc toutes les racines réelles sont positives. Si α_1 est une de ces racines, l'équation caractéristique admet les racines $\pm \sqrt{a\alpha_1}$

et par conséquent l'équation proposée admet les solutions particulières

$$e^{-\frac{ax^2}{2}} e^{\sqrt{a\alpha_1}x}, \quad e^{-\frac{ax^2}{2}} e^{-\sqrt{a\alpha_1}x}$$

ou encore, si a est positif, les solutions

$$e^{-\frac{ax^2}{2}} \operatorname{ch} \sqrt{a\alpha_1}x, \quad e^{-\frac{ax^2}{2}} \operatorname{sh} \sqrt{a\alpha_1}x \tag{5}$$

et si a est négatif, les solutions

$$e^{-\frac{ax^2}{2}} \cos \sqrt{-a\alpha_1}x, \quad e^{-\frac{ax^2}{2}} \sin \sqrt{-a\alpha_1}x. \tag{6}$$

4. Supposons maintenant n impair, ce qui revient à remplacer n par $2n+1$ dans l'équation (4). Celle-ci devient

$$\binom{2n+1}{1} z' F_{2n}(\varphi) + \ldots + \binom{2n+1}{2p+1} z^{(2p+1)} F_{2n-2p}(\varphi) + \\ + \ldots + z^{(2n+1)} F_0(\varphi) = 0,$$

c'est-à-dire

$$z^{(2n+1)} - \binom{2n+1}{2} a z^{(2n-1)} + \ldots + (-1)^{n-p} \binom{2n+1}{2p+1} (2n-2p-1)!!\, a^{n-p} z^{(2p+1)} \\ + \ldots + (-1)^n \binom{2n+1}{1} (2n-1)!!\, a^n z' = 0.$$

Lorsque n est impair, on est donc également ramené à l'intégration d'une équation différentielle à coefficients constants.

Cette équation admet la solution $z = c^{te}$ et par suite l'équation (1) admet la solution particulière

$$y = e^{-\frac{ax^2}{2}},$$

comme nous l'avions déjà remarqué.

En posant $z' = u$, on est ramené à l'intégration de l'équation

$$u^{(2n)} - \binom{2n+1}{2} a u^{(2n-2)} + \ldots + (-1)^n \binom{2n+1}{1} (2n-1)!!\, a^n u = 0.$$

On en déduit, comme plus haut, que l'équation (1) admet les solutions du type (5) si a est positif, ou du type (6), si a est négatif.

En résumé : *La substitution*

$$y = e^{-\frac{ax^2}{2}} z$$

ramène l'intégration de l'équation (1) *à celle d'une équation à coefficients constants, du même ordre, si* n *est pair, d'ordre* n — 1 *si* n *est impair. Dans ce dernier cas, l'équation* (1) *admet la solution particulière*

$$y = e^{-\frac{ax^2}{2}}.$$

5. Appliquons la méthode précédente à l'intégration de l'équation

$$y''' + 3axy'' + 3a^2x^2y' + a^3x^3y = 0.$$

La substitution $y = \varphi z$ conduit à l'équation

$$z''' - 3az' = 0,$$

c'est-à-dire, en posant $z' = u$,

$$u'' - 3au = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$u = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{3a}x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{3a}x.$$

On en déduit

$$z = C_1' \operatorname{sh} \sqrt{3a}x + C_2' \operatorname{ch} \sqrt{3a}x.$$

L'intégrale générale de l'équation proposée peut donc s'écrire, en changeant le nom des constantes,

$$y = e^{-\frac{ax^2}{2}} (C_0 + C_1 \operatorname{ch} \sqrt{3a}x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{3a}x).$$

En particulier, si a est négatif, cette intégrale s'écrit

$$y = e^{-\frac{ax^2}{2}} (C_0 + C_1 \cos \sqrt{-3a}\, x + C_2 \sin \sqrt{-3a}\, x).$$

6. Considérons maintenant l'équation

$$y^{(4)} + 4axy''' + 6a^2x^2y'' + 4a^3x^3y' + a^4x^4y = 0.$$

La substitution $y = \varphi z$ donne

$$z^{(4)} - 6az'' + 3a^2z = 0.$$

En posant, dans l'équation caractéristique

$$r^4 - 6ar^2 + 3a^2 = 0$$

de cette équation, $r^2 = a\rho$, on a

$$\rho^2 - 6\rho + 3 = 0,$$

dont les racines sont

$$\alpha_1 = 3 + \sqrt{6}, \qquad \alpha_2 = 3 - \sqrt{6},$$

toutes deux positives. L'équation caractéristique a donc les quatre racines

$$r_1 = \sqrt{a\alpha_1}, \quad r_2 = -\sqrt{a\alpha_1}, \quad r_3 = \sqrt{a\alpha_2}, \quad r_4 = -\sqrt{a\alpha_2}.$$

Si a est positif, l'intégrale générale de l'équation proposée s'écrit

$$y = (C_1 \operatorname{ch} \sqrt{a\alpha_1}x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{a\alpha_1}x + C_3 \operatorname{ch} \sqrt{a\alpha_2}x + C_4 \operatorname{sh} \sqrt{a\alpha_2}x) e^{-\frac{ax^2}{2}};$$

si a est négatif, elle s'écrit

$$y = (C_1 \cos \sqrt{-a\alpha_1}x + C_2 \sin \sqrt{-a\alpha_1}x + C_3 \cos \sqrt{-a\alpha_2}x +$$
$$+ C_4 \sin \sqrt{-a\alpha_2}\, x) e^{-\frac{ax^2}{2}}.$$

7. Voici maintenant quelques renseignements bibliographiques. L'équation (1) a été considérée par T. CRAIG dans ses recherches sur les équations linéaires à solutions périodiques (AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS, 1885, t. VII, pp. 279-287) qui en a donné l'intégrale générale pour $n = 2$, 3, 4. Ces cas sont signalés par M. KAMKE dans son ouvrage *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen* (Leipzig, 1942).

L'intégration de l'équation (1), où $a = 1$, a été proposée par H. LAURENT (NA, 1898-244, question 1797). La question a été résolue par AUDIBERT (NA, 1900, pp. 376-377) par la substitution $y = e^{-\frac{x^2}{2}} z$.

Dans un travail récent, MORETTI (RIVISTA DI MATEMATICA DELLA UNIVERSITÀ DI PARMA, 1950, t. I, pp. 471-473) démontre que l'on peut trouver des constantes a, d'une seule manière, telles que

$$\Sigma \frac{1}{r!} \frac{d^r}{dx^r} P_n(x) \cdot \frac{d^r}{dx^r} f(x) \equiv e^{-\frac{x^2}{2}} \Sigma\, a_r \frac{d^r}{dx^r} \left[e^{\frac{x^2}{2}} f(x) \right],$$

r variant de 0 à n et $P_n(x)$ étant un polynome entier en x, de degré n. Il en déduit l'intégration de l'équation

$$\frac{P_n^{(n)}(x)}{n!}y^{(n)} + \frac{P_n^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{(n-1)} + \dots + \frac{P_n'(x)}{1!}y' + P_n(x)y = 0.$$

Celle-ci se ramène à l'intégration de l'équation à coefficients constants

$$\Sigma\, a_r \frac{d^r}{dx^r}\left(e^{\frac{x^2}{2}}y\right) = 0, \qquad (r = 0, 1, \dots, n)$$

d'après la formule précédente.