(*Dai « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », Serie V, Vol. X, Fasc. 1-2, Roma 1951*)

Sur les surfaces algébriques d'ordre n dont les adjointes d'ordre $n-4$ possèdent une partie fixe

par **LUCIEN GODEAUX** (à Liège)

F. Enriques a appelé l'attention sur l'intérêt que présente la détermination des surfaces dont les sections hyperplanes constituent le système canonique complet (¹). Dans ses *Lezioni sulla Teoria delle Superficie algebriche* (²), il s'est occupé des surfaces de genre géométrique $p_g = 4$, dont les sections planes sont les courbes canoniques. Il y est revenu dans son dernier volume sur les surfaces algébriques (³). Il y détermine les surfaces à sections canoniques d'ordres 7, 8 et 9, en utilisant une méthode due à M. Franchetta (⁴). Cette méthode consiste essentiellement dans la construction d'une surface rationnelle ayant un certain nombre de caractères communs avec la surface cherchée, à laquelle on fait perdre le caractére de surface rationelle par la suppression d'une singularité.

D'une manière précise, soit F une surface d'ordre n de l'espace ordinaire, dont le système des sections planes constitue le système canonique complet. Cette surface a le genre linéaire $p^{(1)} = n+1$, posséde une courbe double D et un certain nombre de points, triples pour la surface et pour la courbe double. On construit une surface rationnelle F', d'ordre n, ayant la même courbe double et

(¹) Enriques, *Sulla classificazione delle superficie algebriche* . . . (Rend. Accad. Lincei, 1914, pp. 206-214, 291-297).

(²) Rédigées par M. L. Campedelli. Padova, Cedam, 1932.

(³) Enriques, *Le superficie algebriche*. Bologna, Zanichelli, 1949, Voir Chap. VIII.

(⁴) *Su alcuni esempi di superficie canoniche* (Rendiconti del Seminario Matematico di Roma, 1939, pp. 1-6).

les mêmes points triples que F, dont les sections planes ont le genre $n+1$ et on cherche alors à supprimer une singularité de F' qui lui fait perdre la rationnalité.

Nous n'avons eu connaissance des travaux de M. Franchetta que tout récemment, alors que nous avions cherché à résoudre le même problème par une voie différente.

Les adjointes d'ordre $n-4$ à la surface F comprennent une partie fixe Φ que nous supposons irréductible et qui est d'ordre $n-5$. Il existe un faisceau de surfaces d'ordre n touchant la surface Φ le long de la courbe D. En remarquant que la surface Φ a des points doubles coniques aux points triples de F, on est conduit à considérer la surface Φ comme l'image d'une involution du second ordre présentant un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique (5). Nous avons pu ainsi prouver l'existence des surfaces F d'ordres $n=7$ (6), $n=8$ (7) et $n=9$ (8).

Dans ce travail, nous exposons cette méthode pour la détermination de surfaces F, d'ordre n, dont les adjointes d'ordre $n-4$ comprennent une partie fixe d'ordre $m < n-4$. Nous prouvons, en appliquant cette méthode, l'existence d'une surface d'ordre dix, dont les sections planes forment le système canonique complet.

I

1. — Soit F une surface algébrique d'ordre n, irréductible, privée de courbes exceptionnelles, dont le systeme canonique complet est découpé par la totalité des surfaces d'ordre $n-m-4$. Cette surface a donc le genre géométrique

$$p_g = \binom{n-m-1}{3}.$$

(5) Voir L. Godeaux, *Sur les surfaces algébriques doubles n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914, pp. 289-312); *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient, N° 270, Paris, Hermann, 1935).

(6) *Construction d'une surface canonique du septième ordre* (Bulletin de la Soc. des Sc. de Liége, 1944, pp 94 97.

(7) *Construction d'une surface canonique du huitième ordre* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1944, pp. 132-144).

(8) *Construction d'une surface canonique du neuvième ordre* (Bull de l'Acad. de Belgique, 1944, pp. 202-212).

Le degré du système canonique est

$$p^{(1)} - 1 = n(n - m - 4)^2.$$

D'autre part, si π est le genre des sections planes de F, on a

$$p^{(1)} = (n - m - 4)\pi + \binom{n - m - 4}{2} n - (n - m - 5).$$

On en conclut

$$\pi = \frac{1}{2} n(n - m - 3) + 1.$$

Supposons que la surface F possède une courbe double D; l'ordre de cette courbe est

$$\frac{1}{2} n m.$$

L'un au moins des nombres n, m doit donc être pair.

Nous supposerons que la surface F possède τ points triples, triples également pour la courbe double D. Soient P_1, P_2,..., P_τ ces points.

Les adjointes d'ordre $n - 4$ à la surface F possèdent une partie fixe Φ, d'ordre m, passant simplement par la courbe D et doublement par les points P_1, P_2, . . . , P_τ.

Faisons l'hypothèse qu'il existe une surface Ψ, d'ordre $n - m$, passant simplement par les points P_1, P_2, . . . , P_τ, mais ne contenant pas la courbe D.

Les surfaces F et $\Phi + \Psi$ déterminent un faisceau dont la surface générale touche Φ le long de la courbe D, a des points triples en P_1, P_2, . . , P_τ et des points doubles aux points R_1, R_2, . . . , R_μ où la surface Ψ rencontre la courbe D. On a

$$\mu = \frac{1}{2} n m (n - m) - 3\tau.$$

2. — Considérons la surface Φ et supposons qu'il existe une surface F_0, d'ordre n, ayant des points triples en P_1, P_2, . . . , P_τ et touchant la surface Φ le long de la courbe D.

La classe de la développable lieu des plans tangents à Φ aux points de la courbe D est égale au nombre des points de rencontre avec D de la polaire d'un point quelconque M par rapport à Φ, en dehors des points P_1, P_2, . . . , P_τ, c'est-à-dire à

$$\delta = \frac{1}{2} n m (m - 1) - 3\tau.$$

Cette développable est aussi le lieu des plans tangents à F_0 aux points de D. Or, en dehors des points $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$, la première polaire d'un point quelconque par rapport à F_0 coupe D en

$$\delta' = \frac{1}{2} n\, m\, (n - 1) - 6\,\tau$$

points. Il doit donc exister, sur D, $\delta' - \delta$ points où le plan tangent à F_0 est indéterminé, c'est-à-dire $\delta' - \delta$ points de D qui sont doubles pour F_0. On a d'ailleurs

$$\delta' - \delta = \frac{1}{2} n\, m\, (n - m) - 3\,\tau = \mu\,.$$

Nous désignerons par G le groupe formé par ces points doubles.

Supposons qu'il existe ∞^r surfaces F_0 touchant Φ le long de la courbe D et ayant des points triples en $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$. Ces surfaces forment un système linéaire et à chacune d'elles est associé un groupe G de points appartenant à la courbe D. Supposons qu'un même groupe G soit formé des points doubles de $\infty^{r'}$ surfaces F_0. Il existe une correspondance biunivoque entre les groupes G et les $\infty^{r-r'}$ surfaces F_0 passant par r' points quelconques de l'espace, donc l'ensemble des groupes G est rationnel.

D'autre part, il existe ∞^{r-1} surfaces F_0 touchant en un point R de D une droite non tangente aux surfaces Φ, F_0 en ce point. Par suite, ce point est double pour ces ∞^{r-1} surfaces F_0 et celles-ci forment un système linéaire.

On en conclut que les groupes G appartiennent sur la courbe D à une série linéaire $| G |$.

Par un point de Φ n'appartenant pas à la courbe D passent ∞^{r-1} surfaces F_0 et ces surfaces contiennent nécessairement la surface Φ comme partie. Elles sont complétées par des surfaces Ψ, d'ordre $n - m$, ne contenant pas la courbe D mais passant (simplement) par les points $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$. Les surfaces Ψ découpent, en dehors de ces points, sur la courbe D, des groupes de la série $| G |$.

3. — Inversement, supposons qu'il existe une surface Ψ d'ordre $n - m$ passant simplement par $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$ et une surface F_0 touchant Φ le long de D, ayant des points triples en $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$ et des points doubles aux points d'un groupe G. Supposons en outre que la surface Ψ passe par les points de ce groupe G.

Il existe alors un faisceau de surfaces touchant Φ le long de D, ayant des points triples en $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$ et des points doubles aux points du groupe G. Il existe une surface de ce faisceau touchant en un point R de D, simple pour F_0, une droite non tangente en ce point à F_0. Cette surface possède un point double en R et par conséquent, les polaires de cette surface, qui passent deux fois par $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$, une fois par les points de G et une fois par R, contiennent D et cette courbe est double pour la surface.

On en conclut que la construction de la surface F, ayant D comme courbe double et $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$ comme points triples, revient à :

1) Construire une surface F_0 touchant la surface Φ le long de la courbe D;

2) Construire une surface Ψ d'ordre $n-m$, passant simplement par les points $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$ et par le groupe G des μ points doubles de F_0 sur D, sans contenir cette courbe;

3) Déterminer la courbe D de manière qu'elle n'appartienne pas à une surface irréductible d'ordre $n-4$, ou encore que toute surface d'ordre $n-4$ passant par D contienne Φ comme partie.

4. — Désignons par C les sections planes de la surface Φ. Les points doubles coniques $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$ de cette surface sont équivalents, au point de vue des transformations birationnelles, à des courbes rationnelles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\tau$ de degrés virtuels -2.

S'il existe une surface F_0 touchant Φ le long de D et ayant des points triples en $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$, la courbe D satisfait à l'équation fonctionnelle

$$2\,D \equiv n\,C - 3\,(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\tau).$$

Cette relation va nous permettre de déterminer le degré et le genre virtuels de la courbe D.

On a

$$n\,[C\,,\,D] = 2\,[D\,,\,D] + 3\,[\gamma_1\,,\,D] + \ldots + 3\,[\gamma_\tau\,,\,D]\,,$$

d'où

$$[D\,,\,D] = \frac{1}{4}\,n^2\,m - \frac{9}{2}\,\tau\,.$$

Nous supposerons que la surface Φ ne possède que des points doubles coniques; dans ces conditions, son système canonique $|\,K\,|$

est découpé par les surfaces d'ordre $m-4$ et on a successivement

$$| K | = | (m-4) C | ,$$

$$| C' | = | (m-3) C | ,$$

$$(n-1) C + C' \equiv D + D' + 3 (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\tau),$$

$$(n+m-4) C \equiv D + D' + 3 (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\tau).$$

Si η est le genre de la courbe D, on a donc

$$\frac{1}{2} n m (n-m-4) = [D , D] + 2\eta - 2 + 9\tau ,$$

et par conséquent

$$\eta = \frac{1}{8} n m (n + 2m - 8) - \frac{9}{4}\tau + 1 .$$

On a vu plus haut que l'un au moins des nombres m , n est pair. Les nombres $[D , D]$ et η doivent être des entiers et on est par conséquent conduit aux hypothèses suivantes :

a) Supposons n pair et posons $n = 2n'$. Alors, pour que $[D, D]$ soit entier, τ doit être pair. Posons $\tau = 2\tau'$.

Dans ces conditions, on a

$$\eta = \frac{1}{2} n' m (n' + m - 4) - \frac{9\tau'}{2} + 1 .$$

On a nécessairement l'un des cas suivants: n' est pair, ou m est pair, ou n et m sont de même parité. Dans tous les cas, τ' est pair et τ est donc multiple de 4.

b) Supposons n impair et par conséquent m pair. Posons $n = 2n' + 1$ et $m = 2m'$. Pour que $[D, D]$ et η soient des entiers, il faut que $m' - \tau$ soit multiple de 4.

5. — Nous ne considérerons ici que le premier cas, où n est pair et τ multiple de 4 ; nous poserons $n = 2\nu$, $\tau = 4\varepsilon$.

L'existence de la courbe D sur la surface Φ entraîne celle de la courbe

$$D_0 \equiv D + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\tau .$$

On a alors

$$2\nu C \equiv 2 D_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\tau .$$

Il existe par suite une surface d'ordre $n = 2\nu$ touchant la surface Φ le long de la courbe D_0 et cette surface passe simplement par les points $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$. Par conséquent (9), la surface Φ est l'image d'une involution I du second ordre appartenant à une surface Φ^*, l'involution possédant $\tau = 4\varepsilon$ points unis.

Aux courbes C correspondent sur Φ^* des courbes C^* appartenant à un système linéaire $|C^*|$ de degré $2m$ et de genre $m(m-3)+1$.

Le système $|\nu C|$ a pour transformé sur Φ^* un système linéaire $|\nu C^*|$ de degré $2m\nu^2$ et de genre

$$m\nu^2 + m(m-4)\nu + 1 .$$

Le système complet $|\nu C^*|$ comprend en outre les transformées D_0^* des courbes D_0. Il en résulte que les courbes D_0 ont le degré $m\nu^2 - 2\varepsilon$ et le genre

$$\frac{1}{2} m\nu(m+\nu-4) - \varepsilon + 1 .$$

Désignons par r la dimension du système complet $|\nu C^*|$, par r_0 celle du système $|\nu C|$ et par r_1 celle du système $|D_0|$. Nous avons

$$r_0 + r_1 = r - 1 .$$

Si nous rapportons projectivement les courbes du système $|\nu C^*|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_r, nous obtenons un modèle projectif normal de Φ^* dans cet espace. C'est ce modèle que nous désignerons dorénavant par Φ^*. Sur ce modèle, l'involution I est déterminée par une homographie harmonique H dont les axes ponctuels sont des espaces linéaires σ_0, σ_1 respectivement à r_1 et r_0 dimensions. Les courbes transformées des courbes νC de Φ son découpées par les hyperplans passant par σ_1 et les courbes D_0^* par les hyperplans passant par σ_0.

L'espace σ_1 ne rencontre pas la surface Φ^*, mais l'espace σ_0 la rencontre aux τ points unis de I, points que nous désignerons par $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_\tau^*$ et qui correspondent aux points doubles (de diramation) de Φ.

(9) *Sur les surfaces algèbriques doubles* . . . (loc. cit); *Sur la construction de surfaces doubles n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation* (Bull. Acad. de Belgique. 1944, pp. 213-225).

Le plan tangent à Φ^* en chacun des points $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_\tau^*$ ne rencontre σ_0 qu'au point de contact, mais s'appuie suivant une droite sur σ_1.

6. — Supposons que nous ayons réussi à construire la surface Φ^* et l'involution I, représentée dans l'espace S_3 par la surface Φ. Nous en déduisons l'existence des courbes D_0 et de surfaces d'ordre $n = 2\nu$ touchant Φ le long d'une courbe D_0. Pour notre objet, il faut déterminer la surface F_0 ayant des points triples en $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$ et touchant Φ le long de la courbe D.

Projetons la surface Φ^* de σ_0 sur σ_1; nous obtenons un modèle projectif $\overline{\Phi}$ de Φ dont les sections hyperplanes sont les courbes D_0. Aux points $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_\tau^*$ correspondent des droites $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ de cette surface. Un hyperplan passant par p_1 par exemple, dans σ_1, coupe encore $\overline{\Phi}$ suivant une courbe rencontrant p_1 en trois points. Par conséquent, s'il existe une courbe D, il existe un hyperplan de σ_1 contenant les τ droites $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$.

Retournons à la surface Φ^*. Pour qu'il existe une courbe D, il faut qu'il existe un hyperplan passant par σ_0 et contenant les plans tangents à Φ^* aux points $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_\tau^*$. Cet hyperplan doit satisfaire à 2τ conditions au plus. Par conséquent, il existera certainement des courbes D si la dimension de $|D_0|$ est au moins égale à 2τ.

Supposons qu'il existe au moins une courbe D; elle a des points triples en $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$ et il existe une surface F_0 d'ordre n touchant la surface Φ le long de cette courbe Cette surface F_0 touchant Φ, touche également au point P_1 par exemple, les tangentes à D en ce point et le cône tangent à F_0 en P, doit toucher le long de ces droites, le cône tangent à Φ. Mais pour cela, il faut que F_0 ait un point triple en P.

Il en résulte que l'existence de la courbe D entraîne celle d'une surface F_0 touchant Φ le long de cette courbe et ayant des points triples en $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$.

7. — Nous devons maintenant voir dans quelles conditions une surface d'ordre $n - 4$, passant par D, contient nécessairement la surface Φ comme partie.

S'il existe une surface d'ordre $n - 4$ passant par D et ayant par conséquent des points doubles en $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$, elle découpe sur Φ une courbe L satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$L + D + 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\tau) \equiv (n-4)\,C\,.$$

Multiplions les deux membres de cette relation par 2 et tenons compte de l'expression de D; il vient

$$2\,L + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\tau \equiv (n-8)\,C\,.$$

On en conclut que sur la surface Φ^*, le système $|\,(\nu-4)\,C^*\,|$ est plus ample que le système $|\,(\nu-4)\,C\,|$ sur Φ, et contient le transformé des courbes L.

Par conséquent, si le système $|\,(\nu-4)\,C^*\,|$ sur Φ^* a la même dimension que le système $|\,(\nu-4)\,C\,|$ sur Φ, les courbes L n'existent pas et les surfaces d'ordre $n-4$ passant par D contiennent nécessairement Φ comme partie, si l'on a $n > 8$.

Observons que dans les conditions précédentes, le systèmes

$$|\,(\nu-5)\,C^*\,|\,,\ |\,(\nu-6)\,C^*\,|\,,\ldots,\ |\,C^*\,|$$

sur Φ^*, ont respectivement les mêmes dimensions que les systèmes

$$|\,(\nu-5)\,C\,|\,,\ |\,(\nu-6)\,C\,|\,,\ldots,\ |\,C\,|$$

sur Φ.

Nous en concluons que:

Pour construire une surface F, d'ordre $n = 2\nu$, possédant une courbe double D d'ordre νm et $\tau = 4\varepsilon$ points triples pour la surface et pour la courbe D, sur laquelle le système canonique complet est découpé par la totalité des surfaces d'ordre $n-m-4$ de l'espace, il faut:

1) *Construire une surface Φ, d'ordre m, possédant $\tau = 4\varepsilon$ points doubles coniques, qui soit l'image d'une involution du second ordre possédant τ points unis, appartenant à une surface Φ^*, de telle sorte que les systèmes qui correspondent sur Φ^* au système $|\,C\,|$ des sections planes et aux systèmes $|\,2\,C\,|\,,\ |\,3\,C\,|\,,\ldots,\ |\,(\nu-4)\,C\,|$ de Φ, aient respectivement les mêmes dimensions. De plus, il doit exister au moins $\infty^{2\tau}$ surfaces passant par les points doubles de Φ, touchant cette surface en tout points d'intersection.*

2) *Qu'il existe une surface Ψ d'ordre $n-m$, passant simplement par les τ points doubles de Φ et coupant D en un groupe de points qui soient doubles pour une surface d'ordre n, touchant Φ le long de la courbe D.*

II

8. — Nous allons appliquer la méthode précédente à la démonstration de l'existence d'une surface du dixième ordre dont les sections planes constituent le système canonique complet.

Supposons donc $n = 10$, $\nu = 5$, $m = 5$. La courbe D a l'ordre 25 et, sur la surface Φ, du cinquième ordre, on a

$$[D, D] = 75 - 18\varepsilon, \eta = 76 - 9\varepsilon.$$

Le système $|(\nu - 4)C^*|$, c'est-à-dire actuellement le système $|C^*|$, sur la surface Φ^* et le système $|(\nu - 4)C|$, c'est-à dire $|C|$, sur la surface Φ, doivent avoir la même dimension. Or, sur Φ, le système $|C|$ est le système canonique et par suite $|C^*|$ est le système canonique de Φ^*. Entre les genres arithmétiques $p_a^* = 4$ de Φ^* et $p_a = 4$ de Φ, nous avons la relation

$$12(p_a^* + 1) = 24(p_a + 1) - 3\tau,$$

d'où l'on déduit $\tau = 20$.

Il s'agit donc de construire une surface Φ, du cinquième ordre, possédant 20 points doubles coniques, image d'une involution du second ordre appartenant à la surface Φ^*.

9. — Soit K une surface de Kummer. G. Humbert ([10]) a démontré qu'il existe des surfaces du cinquième ordre, passant par dix des seize points doubles de la surface et touchant K le long d'une courbe k du dixième ordre. Désignons par φ une telle surface.

La développable lieu des plans tangents à la surface K le long de la courbe k est de classe $3 \times 10 - 10 = 20$. D'autre part, la classe de la même développable, considérée comme lieu des plans tangents à φ le long de la courbe k, est

$$4 \times 10 - x,$$

où x est le nombre des points doubles de la surface φ situés sur la courbe k. On en conclut $x = 20$.

([10]) G Humbert, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* (Journal de Liouville, 1893, pp. 29-170, 361-475; Oeuvres, tome II).

Ainsi, la surface φ possède 20 points doubles coniques et il existe une surface du quatrième ordre touchant la surface le long d'une courbe d'ordre 10, passant par les 20 points doubles. Par conséquent, φ représente une involution du second ordre, présentant 20 points unis, appartenant à une surface φ^*.

En appliquant la formule rappelée plus haut, on voit que φ^* a, comme φ, le genre arithmétique $p_a^* = 4$.

Désignons par $| C |$ le système des sections planes de φ, par $| C^* |$ le système qui lui correspond sur φ^*. A la courbe k correspond sur φ^* une courbe appartenant au système $| 2 C^* |$.

Sur φ^*, le système $| C^* |$ a le degré 10 et le genre 11. Le système $| 5 C^* |$ a par conséquent le degré 250 et le genre 151. Comme il est l'adjoint au système $| 4 C^* |$, il est régulier et a la dimension 104.

D'autre part, sur φ, le système $| 5 C |$ a la dimension 54. Dans $| 5 C^* |$, il existe donc deux systèmes linéaires appartenant à l'involution. L'un, contenant les transformées des courbes $5 C$, a la dimension 54 et l'autre a par conséquent la dimension 49. Aux courbes de ce second système correspondent sur φ les courbes D_0. Comme sa dimension est supérieure à $2 \tau = 40$, il existe des courbes D_0^* ayant des points triples aux points unis de l'involution, c'est-à-dire des courbes D^*.

Il en résulte que l'on peut prendre pour Φ la surface φ et qu'il existe sur cette surface des courbes D ayant des points triples aux vingt points doubles de la surface.

On vérifie d'ailleurs que sur Φ, le système $| D |$ a bien le degré 35 et le genre 31. Le système $| D |$ est de dimension 9, comme on le voit en appliquant le théorème de Riemann-Roch. On en conclut que sur la surface Φ^*, les courbes D_0^* ayant des points triples aux 20 points unis de l'involution, sont soumises à quarante conditions.

10. — Les surfaces Ψ du cinquième ordre, distinctes de Φ, dépendent de 54 paramètres. Celles qui passent par les 20 points triples d'une courbe D rencontrent encore cette courbe en des groupes de $\mu = 65$ points, formant une série linéaire non spéciale, puisque D est de genre 31. Cette série a donc la dimension 34 et par conséquent, la série complète est découpée par les surfaces Ψ, du cinquième ordre, distinctes de Φ, passant par les 20 points triples de D.

Le long d'une courbe D, il existe une surface F_0 du dixième ordre touchant la surface Φ, ayant des points triples aux points triples de D et un groupe G de $\mu = 65$ points doubles sur cette courbe. Il existe certainement une surface Ψ passant par le groupe G. Le faisceau déterminé par les surfaces F_0 et $\Phi + \Psi$ contient une surface F ayant D comme courbe double.

Par conséquent :

Il existe des surfaces du dixième ordre, possédant une courbe double d'ordre 25, ayant 20 points triples pour la surface et pour la courbe double, dont le système canonique est constitué par le système des sections planes.

Gubbio - Soc. Tipografica "ODERISI" - 1951