SUR LES SURFACES REPRÉSENTANT LES COUPLES DE POINTS DE CERTAINES COURBES ALGÉBRIQUES

Par LUCIEN GODEAUX

(Liége)

(Recibido el 13 de septiembre de 1961)

A mon Ami Allessandro Terracini.

Nous avons, à diverses reprises, étudié des surfaces irrégulières contruites de la manière suivante: On considère la surface F qui représente les couples de points non ordonnés d'une courbe algébrique L contenant une involution cyclique γ d'ordre premier p supérieur à deux. La surface F contient alors une involution cyclique I d'ordre p, présentant un nombre fini de points unis. La surface Φ image de cette involution contient à son tour une involution d'ordre p dont l'image est la surface F' représentant les couples de points non ordonnés de la courbe L', image de l'involution γ donnée sur L. La surface Φ a la même irrégularité que la surface F' [1].

C'est un problème analogue que nous étudions ici. Nous supposons cette fois que l'involution γ donnée sur L est d'ordre deux mais est privée de points unis. La surface F contient une involution d'ordre deux possédant actuellement une courbe unie. La surface Φ image de cette involution contient à son tour une involution d'ordre deux, mais celle-ci est privée de points unis. L'image de cette involution est la surface F' et la surface Φ a la même irrégularité que cette dernière surface, mais son système canonique est plus ample. Nous croyons que cette propriété n'est pas dépourvue d'intérêt.

---

(1) Voir par exemple notre communication au Convegno di Geometria algebrica de Turin (mai 1961), qui paraîtra dans le prochain volume des Rendiconti del Seminario Matematico di Torino.

L'application au cas où la courbe L' est de genre trois présente un intérêt spécial, car la courbe est alors à modules généraux [2].

1. Soit L une courbe algébrique de genre π_1, non hyperelliptique, contenant une involution γ du second ordre, privée de points unis. Si L' est une courbe algébrique image de l'involution γ et π son genre, on a $\pi_1 = 2\pi - 1$. Nous supposerons $\pi \geqslant 3$ et que la courbe L' n'est pas hyperelliptique.

Prenons pour modèle projectif de L la courbe canonique d'ordre $2\pi_1 - 2$ située dans un espace linéaire S à $\pi_1 - 1$ dimensions. L'involution γ est déterminée sur L par une homographie harmonique T possédant deux axes ponctuels ξ_0, ξ_1 ne rencontrant pas la courbe. Les hyperplans passant par ξ_0 découpent sur la courbe les transformés des groupes canoniques de L', donc un système de dimension $\pi - 1$. L'espace ξ_1 a par conséquent la dimension $\pi - 1$ et par suite l'espace ξ_0 a la dimension $\pi - 2$. Les hyperplans passant par ξ_0 découpent sur L les transformés des groupes d'une série paracanonique de la courbe L'.

Désignons par F la surface qui représente les couples de points non ordonnées de L et par F' celle qui représente les couples de points non ordonnés de L'.

Soit P le point de F qui représente le couple de points P_1, P_2 de L et soient P'_1, P'_2 les points que T fait correspondre à P_1, P_2, P' le point de F qui représente le couple P'_1, P'_2. Il existe une transformation birationelle θ de F en soi faisant correspondre à P le point P' et inversement à P' le point P. Cette transformation engendre sur F une involution I d'ordre deux dont nous désignerons par Φ une surface image. Cette involution I possède une courbe de points unis: la courbe K_0 qui représent les couples de points de l'involution γ.

2. Désignons par y_0 $y_1, \ldots, y_{\pi-2}$ les coordonnées d'un point de ξ_0 et par $z_0, z_1, \ldots, z_{\pi-1}$ celles d'un point de ξ_1. Les équations de l'homographie T peuvent s'écrire

$$\rho y'_i = y_i\,, \rho z'_j = -z_j\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, \pi-2\,; j = 1, 2, \ldots, \pi-1).$$

(2) Nous supposons connues nos recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique: *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient. Nº 270. Paris Hermann, 1935), *Mémoire sur les surfaces mulples* (Mémoires in-8º de l'Académie roy. de Belgique, 1952).

Les cordes de L joignant les points des couples de l'involution γ s'appuient sur ξ_0 et ξ_1.

Une droite de S joint deux points y, y' de ξ_0, ou deux points z, z' de ξ_1 ou un point y de ξ_0 à un point z de ξ_1. Les coordonnées des droites de S peuvent donc s'écrire

$$p_{ik} = y_i y'_k - y_k y'_i \, , q_{ik} = z_i z'_k - z_i z'_k \, , r_{ik} = y_i z_k - z_i y_k \, .$$

Les premières sont au nombre de $\frac{1}{2}(\pi-1)(\pi-2)$, les secondes au nombre de $\frac{1}{2}\pi(\pi-1)$ et les troisièmes au nombre de $\pi(\pi-1)$. On a bien

$$\tfrac{1}{2}(\pi-1)(\pi-2) + \tfrac{1}{2}\pi(\pi-1) + \pi(\pi-1) = (\pi-1)(2\pi-1),$$

le second membre étant le nombre des coordonnées des droites de l'espace S.

Si nous supposons que les quantités p_{ik}, q_{ik}, r_{ik} sont les coordonées des points d'une espace linéaire Σ à $(\pi-1)(2\pi-1) - 1 = \pi(2\pi-3)$ dimensions, les cordes de L sont représentées par les points d'une surface normale, modèle projectif de F, que nous continuerons à désigner par F.

Sur ce modèle, θ est déterminée par l'homographie harmonique

$$\rho p'_{ik} = p_{ik}, \rho q'_{ik} = q_{ik}, pr'_{ik} = - r_{ik}.$$

Cette homographie possède deux axes ponctuels ξ'_0, ξ'_1, le premier de dimension $(\pi - 1)^2 - 1$ donné par $r_{ik} = 0$, le second de dimension $\pi(\pi-1) - 1$ donné par $p_{ik} = 0$, $q_{ik} = 0$.

On sait (Severi) que les sections hyperplanes C de la surface F forment le système canonique complet de cette surface.

Les transformées des courbes canoniques de Φ augmentées de la courbe unie K_0 de l'involution I, donnent des courbes canoniques de F. Nous allons voir que la courbe unie K_0 appartient à l'espace ξ'_1.

Comme nous l'avons remarqué, les cordes de F déterminées par les couples de l'involution γ s'appuient sur les espaces ξ_0, ξ_1. Si y est un point de ξ_0 et z un point ξ_1, les coordonnées d'une telle corde sont les mineurs de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} y_0 & y_1 & \dots & y_{\pi-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & z_0 & z_1 & \dots & z_{\pi-1} \end{matrix} \right\| .$$

On a donc $p_{ik} = 0$, $q_{ik} = 0$, $r_{ik} = y_i \, z_k \neq 0$, ce qui démontre notre assertion.

Il en résulte que les hyperplans de Σ_1 passant par l'espace ξ'_1 découpent sur F, en dehors de K_0, les transformées des courbes canoniques de Φ. Ces transformées seront désignées par C_0.

La surface F ne rencontre pas l'espace ξ'_0.

3. Considérons deux points A_1, A_2 de L' et soient A_{11}, A_{12} et A_{21}, A_{22} les couples de γ qui leur correspondent sur L. Le couple $A_1 \, A_2$ est représenté par un point P de F' et les couples formés par les points correspondant sur L par les points $P_1 = (A_{11}, A_{21})$, $P'_1 = (A_{12}, A_{22})$, $P_2 = (A_{11}, A_{22})$, $P'_2 = (A_{12}, A_{21})$. Les couples $P_1 \, P'_1$, $P_2 \, P'_2$ appartiennent à l'involution I et il leur corresponds sur Φ deux points P^*_1, P^*_2. Comme les quatre points de F correspondent au point P de F', les points P^*_1, P^*_2 correspondent à ce point P et, lorsque celui-ci varie, engendrent sur Φ une involution I' dont F' est l'image.

Comme on vient de le voir, les courbes canoniques de Φ correspondent aux courbes C_0 et forment par conséquent un système linéaire de dimension $(\pi - 1)^2 - 1$. D'autre part, aux courbes canoniques de F' correspondent sur Φ des courbes canoniques, ou tout au moins des courbes appartenant à des courbes canoniques de Φ si l'involution I' possède une courbe unie. Le système canonique de F' a la dimension $\frac{1}{2}\pi(\pi - 1) - 1$, donc le système canonique de Φ est plus ample que celui de F' et la surface Φ ne se réduit pas à la surface F' comptée deux fois.

4. Sur la surface F, la courbe H qui représente les couples de points de L dont l'un est fixe engendrent un système ∞^1, $\{H\}$, de degré un et d'indice deux. L'enveloppe de ce système $\{H\}$ est la courbe K qui représente les couples de points de L formés de deux points coincidents.

Sur la surface F' on a un système analogue $\{H'\}$ dont nous désignerons par K' la courbe enveloppe.

Considérons deux points A_1, A_2 de la courbe K' et soient H'_1, H'_2 les courbes H' qui touchent cette courbe en ces points, P leur point de rencontre. Aux points A_1, A_2 correspondent sur K deux couples de points A_{11}, A_{12} et A_{21}, A_{22} appartenant à l'involution I. Désignons par H_{11}, H_{12} les courbes H touchant K en A_{11}, A_{12}, par H_{21}, H_{22} celles qui touchant cette courbe en A_{21}, A_{22}. Soient enfin P_1 le point commun à H_{11}, H_{21}, P'_1 le point commun à H_{12}, H_{22}, P_2 le point commun à H_{11}, H_{22} et P'_2 le point commun à H_{12}, H_{21}. Les courbes H_{11}, H_{12} se coupent en un point R_1, les courbes H_{21}, H_{22} en un point R_2. Les points R_1, R_2 appartiennent à la courbe K_0.

Les points P_1 et P'_1, P_2 et P'_2 forment deux couples de l'involution I auxquels correspondent sur Φ deux points P^*_1 P^*_2.

Désignons par K^* la courbe de genre π qui correspond sur Φ à la courbe K et par K^*_0 celle, de genre π également, qui correspond à K_0.

A la courbe H_{11}, θ fait correspondre H_{12} et à l'ensemble de ces deux courbes correspond sur Φ une courbe H^*_1 qui touche K^* au point A^*_1 homologue du couple A_{11}, A_{12} et qui touche également K^*_0 au point R^*_1 homologue du point uni R_1.

De même, à la courbe $H_{21} + H_{22}$ correspond sur Φ une courbe H^*_2 touchant K^* au point A^*_2 homologue du couple A_{21}; A_{22} et K^*_0 au point R^*_2 homologue de R_2.

Les courbes H^*_1, H^*_2 se coupent aux points P^*_1, P^*_2.

Lorsque le point A_2 varie sur K', les courbes H_{21}, H_{22} varient de même que la courbe H^*_2 et les points P^*_1, P^*_2 décrivent H^*_1. Les courbes H^*_1, H^*_2 appartiennent donc à un système continu $\{H^*\}$ dont l'enveloppe se compose des courbes K^*, K^*_0.

Lorsque A_2 tend vers A_1 sur K', H_{21} tend par exemple vers H_{11} et H_{22} vers H_{12}. Un des couples $P_1 P'_1$, $P_2 P'_2$ tend vers le couple A_{11}, A_{12} et l'autre vers le point R_1. Il en résulte que les points A^*_1, R^*_1 forment un couple de l'involution I'. Il en est de même des points A^*_2, R^*_2: Aux courbes H^* correspondent sur F' les courbes H' et aux courbes K^*, K^*_0 la courbe K'.

Observons que γ étant dépourvue de points unis, les courbes K, K_0 ne se recontrent pas, de même que sur Φ les courbes K^*, K_0^*.

De tout ceci, on conclut que *l'involution I' sur Φ est dépourvue de points unis.*

5. Une série $g^1_{4\pi-4}$ sur la courbe L possède $6(\pi - 1)$ points doubles, donc, sur F, une courbe canonique C rencontre la courbe K en $6(\pi - 1)$ points.

Une série canonique $g^1_{4\pi-4}$ de L ne contenant pas l'involution γ, contient $4(\pi - 1)$ couples de celle-ci, donc les courbes canoniques C de F coupent K_0 en $4(\pi - 1)$ points.

Nous avons appelé C_0 les parties variables des courbes découpées sur F par les hyperplans passant par ξ'_1 et nous avons donc

$$C \equiv K_0 + C_0$$

Sur F', le système canonique $|C'|$ a le degré $(\pi - 1)(4\pi - 9)$, donc le système canonique $|C^*|$ de Φ a le degré $2(\pi - 1)(4\pi - 9)$ et enfin le degré du système $|C_0|$ est $4(\pi - 1)(4\pi - 9)$.

De la relation fonctionnelle précédente, on deduit que les courbes C_0 rencontrent K_0 en $6(\pi - 1)$ points. Enfin, on voit que la courbe K_0 a le degré virtuel $-2(\pi - 1)$.

6. Les transformées des courbes canoniques C^* de Φ sont les courbes C_0, donc le genre géométrique de cette surface est $p^*_g = (\pi - 1)^2$:

Entre les surface F' et Φ, nous avons une correspondance $(1, 2)$ privée de points de diramation, donc entre le genre arithmétique p'_a de F' et celui p^*_a de Φ, nous avons la relation

$$p^*_a + 1 = 2(p'_a + 1);$$

Or,nous avons $p'_a = \frac{1}{2}\pi(\pi - 3)$, donc

$$p^*_a = \pi(\pi - 3) + 1:$$

L'irrégularité de la surface Φ est donc égale à π, c'est-à-dire à l'irrégularité de la surface F'.

Comme nous l'avons vu, le degré du système canonique $|C^*|$ de Φ est égal à $2(\pi - 1)\ (4\pi - 9)$, donc le genre linéaire de cette surface est

$$p^{*(1)} = 2(\pi - 1)\ (4\pi - 9) + 1.$$

Si une courbe algébrique de genre π est l'image d'une involution du second ordre privée de points unis appartenant à une courbe algébrique, la surface que représente les couples de points non ordonnés de cette courbe, surface dont les genres sont

$$p_g = \frac{1}{2}\pi\ (\pi - 1),\ p_a = \frac{1}{2}\pi\ (\pi - 1) - \pi,$$

$$p^{(1)} = (\pi - 1)(4\pi - 9) + 1;$$

est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres

$$p_g = (\pi - 1)^2, p_a = \pi(\pi - 3) + 1,$$

$$p^{(1)} = 2(\pi - 1)(4\pi - 3) + 1,$$

de même irrégularité.

7. Appliquons ce qui précède au cas $\pi = 3$.

On peut prendre comme modèle projectif de la courbe L', à modules généraux, une courbe plane du quatrième ordre et on sait que cette courbe est, de 63 manières, l'enveloppe d'un système de coniques d'indice deux, sans points-base.

Considérons le système de coniques

$$\lambda^2\varphi_1\ (x_1, x_2, x_3) + 2\lambda\ \varphi_2\ (x_1, x_2, x_3) + \varphi_3\ (x_1, x_2, x_3) = 0,$$

dépourvu de points-base. L'equation de la courbe L' est

$$\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3 = 0\ .$$

Considérons, dans un espace S_4, les équations

$$x_4^2 = \varphi_1 \; ; \; x_4 x_5 = \varphi_2 \; ; \; x_5^2 = \varphi_3$$

Ce sont les équations d'une courbe L de genre cinq, transformée en elle-même par l'homographie harmonique

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 = x_1 : x_2 : x_3 : -x_4 : -x_5$$

et cette homographie engendre sur L une involution du second ordre γ, privée de points unis, dont L' est l'image.

Le théorème énoncé plus haut donne le résultat suivant:

La surface qui représente les couples de points non ordonnés d'une courbe de genre trois, dont les genres sont $p_g = 3$, $p_a = 0$, $p^{(1)} = 7$, est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres $p_g = 4$, $p_a = 1$, $p^{(1)} = 13$.

C'est là un résultat que nous avons obtenu d'une manière toute différente dans un travail qui paraîtra dans le Journal des Mathématiques pures et appliquées.

8. Retournons au cas général et appelons C_1 les courbes canoniques de F découpées par los hyperplans passant par l'espace ξ'_0.

En rapportant projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace Σ' à $\pi(\pi - 1) - 1$ dimensions, on obtient un modéle projectif Φ' de Φ, d'ordre $(\pi - 1)(8\pi - 13)$.

Sur cette surface, la courbe de diramation, homologue de K_0, a l'ordre $4(\pi - 1)$ et les sections hyperplanes sont de genre $\frac{1}{2}(\pi - 1)(8\pi - 15) + 1$.

Dans le cas $\pi = 3$, Φ' est, dans un espace S_5, une surface d'ordre 22 à sections hyperplanes de genre dix.

Liége, le 5 septembre 1961.