Extrait de « Mathesis », t. LXIX, nos 7-8-9, 1960.

SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE QUADRIQUES,

par Lucien GODEAUX,
Professeur émérite à l'Université de Liège.

Étant donné un système linéaire de quadriques, de dimension cinq, privé de points-base, quelle est la condition pour que ce système soit composé au moyen d'une involution du second ordre, c'est-à-dire que les quadriques du système passant par un point passent en conséquence par un second point ? Nous déterminons cette condition et le système répondant à la question. En même temps, nous déterminons les systèmes linéaires de quadriques de dimension cinq composés au moyen d'une involution du second ordre.

1. Soit $|Q|$ un système linéaire de quadriques Q, de dimension cinq, dépourvu de points-base. Supposons que les quadriques Q passant par un point P, passent en conséquence par un point P'. Il existe ∞^3 couples de points P, P' formant une involution I, du second ordre, et le système $|Q|$ doit être composé au moyen de cette involution. Chaque quadrique Q contient ∞^2 couples de I. Nous appellerons T la transformation birationnelle faisant correspondre P' à P et par conséquent P à P'. La transformation T est involutive.

Commençons par démontrer qu'il existe ∞^2 quadriques du système $|Q|$ dégénérées en deux plans σ, σ'. Observons que les quadriques Q découpent sur chacun des plans σ, σ' un système linéaire de coniques de dimension quatre.

Le système $|Q|$ est déterminé par six quadriques linéairement indépendantes. Nous pouvons définir chacune de ces quadriques par la polarité par rapport à cette quadrique. Soient

$$\varphi_i(y, z) = \varphi_i(y_1, y_2, y_3, y_4 \,;\, z_1, z_2, z_3, z_4) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

les polarités par rapport aux six quadriques définissant $|Q|$.

Si nous considérons trois points x, y, z non en ligne droite, tout point du plan xyz peut être représenté par $\lambda x + \mu y + \nu z$ et la conique section de la quadrique $\varphi_i(x, x) = 0$ par ce plan a pour équation

$$\lambda^2\varphi_i(x, x) + \mu^2\varphi_i(y, y) + \nu^2\varphi_i(z, z) + 2\mu\nu\varphi_i(y, z) + \\ 2\nu\lambda\varphi_i(z, x) + 2\lambda\mu\varphi_i(x, y) = 0.$$

La condition pour que les six coniques découpées par les six quadriques définissant $|Q|$ ne soient pas linéairement indépendantes est

$$|\varphi_i(x, x) \quad \varphi_i(y, y) \quad \varphi_i(z, z) \quad \varphi_i(y, z) \quad \varphi_i(z, x) \quad \varphi_i(x, y)| = 0, \qquad (1)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Sous cette condition, le plan xyz appartient à une quadrique du système $|Q|$.

Observons que si nous fixons les points y, z et que nous fassions décrire au point x une droite ne rencontrant pas la droite yz, comme l'équation (1) est du quatrième degré en x, il y a quatre points x sur cette droite et on retrouve un théorème connu : *Les plans qui appartiennent à des quadriques d'un système linéaire de dimension cinq enveloppent une surface de quatrième classe* (1).

2. Soient σ, σ' deux plans distincts formant une quadrique du système $|Q|$. L'ensemble de ces plans est transformé en soi par T et deux cas peuvent se présenter :

1° Chacun des plans σ, σ' est transformé en lui-même par T.

2° Le plan σ est transformé en σ' par T.

Occupons-nous du premier cas et commençons par considérer le problème suivant :

Donnons-nous dans un plan σ un système linéaire $|C|$ de coniques, de dimension trois, sans points-base, et supposons qu'il soit transformé en soi par une transformation birationnelle involutive T.

Si r est une droite quelconque, il existe une conique C contenant r comme partie et complétée par une droite r'. Comme chaque conique C est transformée en soi par T, ou bien chacune des droites r, r' est transformée en soi par T, ou bien T transforme r en r'. Comme la droite r a été choisie arbitrairement, T est nécessairement ou l'identité, ou une homologie harmonique.

Considérons dans σ l'homologie harmonique

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : -x_2 : -x_3.$$

Les systèmes linéaires de coniques transformés en eux-mêmes par cette homologie sont

$$x_1 f_1(x_2, x_3) = 0, \qquad x_1^2 + f_2(x_2, x_3) = 0,$$

où f_1 est une forme linéaire et f_2 une forme quadratique, à coefficients variables.

Aucun de ces systèmes n'a la dimension quatre, donc si T transforme

(1) En prenant le corrélatif, on trouve que dans un système linéaire de quadriques-enveloppes, de dimension cinq, privé de plans-base, les sommets R, R' des couples de gerbes de plans formant des quadriques du système appartiennent à une surface du quatrième ordre, sur laquelle ils forment une involution du second ordre. Nous signalons aux jeunes lecteurs de *Mathesis* qu'il y a là une question intéressante à étudier.

en eux-mêmes chacun des plans σ, σ', elle donne l'identité dans ces plans. L'existence de tels couples de plans est évidemment exceptionnelle.

3. Supposons maintenant que T fasse correspondre σ' à σ. A chaque conique C, section par σ d'une quadrique de $|Q|$, correspond dans σ' la conique C', section de la même quadrique Q. En particulier, si la conique C est dégénérée en deux droites r, s, la conique C' est également dégénérée en deux droites r', s'.

Comme les coniques C et C' sont en nombre ∞^4, toute droite r de σ appartient à ∞^1 coniques et il lui correspond une droite r' appartenant à ∞^1 coniques C'. A une droite de σ, T fait correspondre une droite de σ' et par conséquent T est une homographie entre σ et σ'.

Retournons à l'espace et soit r une droite quelconque. Par cette droite passent quatre plans appartenant à des quadriques de $|Q|$. Soient σ_1, σ_2 deux de ces plans et σ_1', σ_2' les plans qui complètent les quadriques Q.

T détermine entre σ_1 et σ_1' une homographie et entre σ_2 et σ_2' une homographie également. Dans ces deux homographies, à la droite r correspond la droite r' intersection de σ_1', σ_2'.

Ainsi, T est biunivoque et fait correspondre à une droite une droite, donc à un plan, un plan. C'est donc une homographie et comme T est involutive, c'est une homographie harmonique.

4. On sait qu'une homographie harmonique de l'espace est soit une homologie harmonique, soit une homographie biaxiale harmonique.

Considérons l'homologie harmonique

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : -x_2 : -x_3 : -x_4.$$

Les systèmes linéaires de quadriques transformés en eux-mêmes par cette homologie sont

$$x_1 f_1(x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad \lambda x_1^2 + f_2(x_2, x_3, x_4) = 0,$$

où f_1 et f_2 sont des formes de degrés un ou deux.

Seul le second système nous intéresse ; il a la dimension six et $|Q|$ est donc obtenu en se donnant une relation linéaire entre λ et les coefficients de f_2. Observons que si cette relation est $\lambda = 0$, on a le système linéaire de cônes dont le sommet est le centre d'homologie.

Considérons maintenant l'homographie biaxiale harmonique

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : -x_3 : -x_4.$$

Les systèmes linéaires de quadriques transformés en eux-mêmes par cette homographie sont

$$\lambda_{13}x_1x_3 + \lambda_{14}x_1x_4 + \lambda_{23}x_2x_3 + \lambda_{24}x_2x_4 = 0$$

et

$$\lambda_{11}x_1^2 + \lambda_{22}x_2^2 + \lambda_{33}x_3^2 + \lambda_{44}x_4^2 + 2\lambda_{12}x_1x_2 + 2\lambda_{34}x_3x_4 = 0. \quad (2)$$

Seul, le second système nous intéresse ; il a précisément la dimension cinq.

Des développements précédents, on conclut le théorème suivant :

Si un système linéaire de quadriques de dimension cinq, privé de points-base, est composé au moyen d'une involution du second ordre, celle-ci est engendrée par une homographie harmonique. Si cette homographie est une homologie, le système est déterminé par le plan d'homologie compté deux fois et par un système linéaire de cônes, de dimension quatre, ayant pour sommet le centre d'homologie et privé de droites-base.

On peut également énoncer le théorème suivant :

Si un système linéaire de quadriques, de dimension cinq, est composé au moyen d'une involution du second ordre, c'est un système extrait du système linéaire de quadriques de dimension six invariant pour une homologie harmonique ou le système de quadriques invariant pour une homographie biaxiale harmonique.