Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 8 janvier 1944, n^{os} 1-3.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur la construction d'une surface d'irrégularité deux,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Dans une note antérieure (1), nous avons montré comment, en partant de la surface qui représente les couples de points d'une courbe contenant une involution cyclique irrationnelle, on peut construire une surface irrégulière. Dans cette note, nous appliquons ce procédé à un exemple, celui où la courbe donnée est de genre quatre et contient une involution cyclique d'ordre trois et de genre deux. Nous construisons ainsi une surface de genres $p_g = 2$, $p_a = 0$, $p^{(1)} = 8$, $P_2 = 9$.

Nous supposons connus les propriétés des surfaces représentant les couples de points d'une courbe algébrique (2) et certains résultats que nous avons obtenus sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (3).

1. Soit G une courbe normale de genre quatre et d'ordre six, contenant une involution cyclique γ_3 d'ordre trois et de genre deux. La courbe G est l'intersection d'une surface cubique et d'une quadrique et l'involution γ_3

(1) *Sur certaines surfaces algébriques irrégulières* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1933, pp. 674-680).

(2) De Franchis, *Sulle varietà* ∞^2 *delle coppie di punti di due o di una curva algebrica* (Rend. Circolo matem. di Palermo, 1903). Severi, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (Mem. R. Accad. di Torino, 1903), *Sulle superficie che rapprensentano le coppie di punti di una curva algebrica* (Atti R. Accad. di Torino, 1902-1903).

(3) Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

est engendrée par une homographie cyclique de période trois de l'espace. Si cette homographie a pour équations

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : \epsilon x_3 : \epsilon^2 x_4, \qquad \epsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

les équations de G s'écrivent

$$a_3 x_3^3 + a_4 x_4^3 + \phi_3(x_1, x_2) = 0,$$
$$a_0 x_3 x_4 + \phi_2(x_1, x_2) = 0,$$

où ϕ_3, ϕ_2 sont des formes du troisième et du second degrés en x_1, x_2.

L'involution γ_3 est dépourvue de points unis. Nous désignerons par G′ une courbe de genre deux image de cette involution.

Soit F la surface qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe G et F′ celle qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe G′.

La surface F a les genres

$$p_g = 6, \quad p_a = 2, \quad p^{(1)} = 22, \quad P_2 = 25$$

et la surface F′ est une surface de Jacobi, de genres

$$p_g = 1, \quad p_a = -1, \quad p^{(1)} = 1, \quad P_2 = 1.$$

2. Considérons deux points P, R de G′ et soit (PR) le point de F′ qui représente ce couple. Désignons par P_1, P_2, P_3 les trois points de G qui correspondent à P, par R_1, R_2, R_3 ceux qui correspondent à R et considérons, sur la surface F, les points

$$\begin{array}{lll} (P_1R_1), & (P_2R_2), & (P_3R_3), \\ (P_1R_2), & (P_2R_3), & (P_3R_1), \\ (P_1R_3), & (P_2R_1), & (P_3R_2). \end{array} \tag{1}$$

Supposons que la transformation génératrice de γ_3 sur G fasse correspondre P_2 à P_1, P_3 à P_2, P_1 à P_3, R_2 à R_1, R_3 à R_2, R_1 à R_3. Il existe une transformation birationnelle T de F en soi faisant correspondre le point (P_2R_2) au point (P_1R_1), au point (P_2R_2) le point (P_3R_3)

et enfin à ce dernier point le point (P_1R_1). La transformation T a donc la période trois et engendre sur F une involution I_3. Les neuf points du tableau (1) se distribuent en trois groupes de I_3, les points d'un même groupe étant sur une même horizontale.

Nous désignerons par F^* une surface image de l'involution I_3.

Lorsque le point (P_1R_1) varie sur F, les neuf points du tableau (1) engendrent une involution J_9, d'ordre neuf, composée au moyen de I_3. Aux groupes de J_9 correspondent sur F^* des groupes de trois points engendrant une involution J'_3, non cyclique, qui a évidemment pour image la surface F'.

3. Aux couples de points de G comprenant un point fixe correspondent sur F les points d'une courbe K, birationnellement identique à G, engendrant sur la surface un système continu $\{K\}$ de degré un et d'indice deux. L'enveloppe de ce système est une courbe K_0 représentant les couples de points de G formés de deux points confondus.

Considérons un groupe P_1, P_2, P_3 de γ_3 sur G et les points (P_1P_2), (P_2P_3), (P_3P_1) de F. Ces trois points forment un groupe de I_3. Lorsque le groupe des points P varie sur G, les trois points de F décrivent une courbe H_0 qui est rencontrée en deux points par les courbes K, mais qui ne peut rencontrer la courbe K_0, car l'involution γ_3 est privée de points unis.

Reprenons le tableau (1) et supposons que le point R vienne coïncider avec le point P. Les points de la première ligne du tableau deviennent les points

$$(P_1P_1), \quad (P_2P_2), \quad (P_3P_3),$$

qui forment un groupe de I_3 appartenant à K_0. Les points des deux dernières lignes se réduisent aux trois points

$$(P_1P_2), \quad (P_2P_3), \quad (P_3P_1)$$

qui forment un groupe de I_3, appartenant à H_0, mais qui sont unis pour J_9. On voit donc que la courbe H_0 est unie pour J_9.

Les courbes K qui passent par les points (P_1P_1), (P_2P_2), (P_3P_3) de K_0 se coupent deux-à-deux aux points (P_1P_2), (P_2P_3), (P_3P_1) de H_0,

Désignons par K_0^*, H_0^* les courbes qui correspondent sur F^* à K_0, H_0. Aux trois courbes K qui viennent d'être considérées correspond sur F^* une courbe K^* de genre quatre, touchant K_0^* en un point P_1 homologue du groupe (P_1P_1), (P_2P_2), (P_3P_3) et ayant un point double en un point P_1' de H_0^*, homologue du groupe (P_1P_2), (P_2P_3), (P_3P_1). Le point P_1 et le point P_1' compté deux fois, forment un groupe de J_3'. Cette involution a donc la courbe H_0^* comme courbe unie.

La courbe K_0^* est de genre deux et birationnellement identique à G'. La courbe H_0^* est également de genre deux et birationnellement identique à K_0^*, donc à G'. A la courbe $H_0^* + K_0^*$ correspond sur F' la courbe K_0' qui représente les couples de points coïncidents de la courbe G'.

La courbe H_0, qui contient une involution d'ordre trois et de genre deux privée de points unis, est de genre quatre.

4. On sait (Severi) que les courbes canoniques C de F représentent les couples de points de G déterminant des bisécantes de cette courbe appartenant à des complexes linéaires.

Dans l'espace réglé, l'homographie génératrice de l'involution γ_3 donne la transformation

$$\frac{p'_{12}}{p_{12}} = \frac{p'_{13}}{\epsilon p_{13}} = \frac{p'_{14}}{\epsilon^2 p_{14}} = \frac{p'_{23}}{\epsilon p_{23}} = \frac{p'_{24}}{\epsilon^2 p_{24}} = \frac{p_{34}'}{p_{34}}.$$

Il y a donc trois faisceaux de complexes linéaires unis pour l'homographie en question, à savoir

$$\lambda_{34}p_{12}+\lambda_{12}p_{34}=0,\quad \lambda_{34}p_{13}+\lambda_{14}p_{23}=0,\quad \lambda_{23}p_{14}+\lambda_{13}p_{24}=0.$$

Nous désignerons respectivement par $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ les faisceaux de courbes canoniques correspondants ; les courbes de ces faisceaux appartiennent à I_3.

Le premier des faisceaux de complexes linéaires est formé des complexes ayant en commun la congruence linéaire de directrices $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$.

Les complexes du second sont tous spéciaux et ont pour axes les droites passant par le point $O_4(0, 0, 0, 1)$ et situés dans le plan $x_3 = 0$.

Les complexes du troisième sont également tous spéciaux ; leurs axes passent par le point $O_3(0, 0, 1, 0)$ et sont situés dans le plan $x_4 = 0$.

Les courbes canoniques C^* de F^* correspondent aux courbes de l'un des faisceaux $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$. D'autre part, aux courbes canoniques C^* de F^*, correspondent sur F' les courbes canoniques de cette surface, qui sont d'ordre zéro, augmentées de la courbe de diramation K'_0 pour la correspondance (1, 3) existant entre F' et F^* Il en résulte qu'il existe, parmi les courbes C^*, une courbe comprenant comme partie la courbe H^*_0 et que par conséquent, celui des faisceaux $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ qui est le transformé du système canonique de F^* a une de ses courbes comprenant comme partie H_0.

Les groupes de points de γ_3 sont découpés sur la courbe G par les plans passant par la droite $O_3O_4(x_1 = x_2 = 0)$, chacun de ces plans contenant deux de ces groupes. Les droites joignant deux à deux les points des groupes de γ_3 s'appuient donc sur la droite O_3O_4, c'est-à-dire appartiennent à un complexe du premier faisceau. Par suite, la courbe H_0 appartient à une courbe du faisceau $|C_0|$. Les courbes canoniques C^* de F^* correspondent donc aux courbes C_0 ; elles forment un faisceau et la surface F^* a donc le genre géométrique $p_g = 2$.

5. Considérons un plan σ passant par O_3O_4 ; soient P_1, P_2, P_3 et R_1, R_2, R_3 les points des deux groupes de γ_3 situés dans ce plan.

Dans le plan σ, l'homographie génératrice de γ_3 détermine une homographie non homologique, par conséquent les points d'un groupe de γ_3 ne peuvent jamais être en ligne droite.

Des quinze points de F qui correspondent aux quinze couples de points de G situés dans σ, six :

$$(P_1P_2),\quad (P_2P_3),\quad (P_3P_1),\quad (R_1R_2),\quad (R_2R_3),\quad (R_3R_1)$$

appartiennent à la courbe H_0 ; les neuf autres, qui sont les points du tableau (1), forment trois groupes de I_3 et engendrent, lorsque σ varie, une courbe H.

La courbe $H_0 + H$ est une courbe canonique de F appartenant au faisceau $|C_0|$.

Supposons que le plan σ touche la courbe G en un point P_1. Le point R_1 coïncide avec P_1, le point R_2 avec P_2 et le point R_3 avec P_3. Le plan σ est donc tritangent à la courbe G. Par une droite, on peut mener 18 plans tangents à la courbe G, donc par O_3O_4 passent six plans tritangents à G.

Soient P_1, P_2, P_3 les points de contact d'un de ces plans avec G. Les quinze points de H correspondants sont les trois points (P_1P_1), (P_2P_2), (P_3P_3) appartenant à K_0 et formant un groupe de I_3, et les trois points (P_1P_2), (P_2P_3), (P_3P_1), formant également un groupe de I_3, comptés deux fois, qui appartiennent à H_0. On en conclut que la courbe H rencontre K_0 en 18 points formant six groupes de I_3 et H_0 en 18 points également, formant aussi six groupes de I_3.

Puisque la courbe $H_0 + H$ est une courbe C_0, de genre 22, la courbe H est de genre un.

La courbe H contenant ∞^1 groupes de I_3, il lui correspond sur F* une courbe H*, elliptique, rencontrant K_0^* en six points et H_0^* en six points également.

La courbe H^* appartenant à l'involution J'_3 et la série déterminée par celle-ci sur la courbe possédant six points unis, cette série est rationnelle ; son image est une courbe rationnelle H' de F'.

La courbe $H_0^* + H^*$ étant une courbe canonique de F^*, la courbe H'doit appartenir au système canonique impur de F' ; c'est donc une courbe exceptionnelle.

6. Entre les surfaces F et F^*, nous avons une correspondance (3,1) privée de points unis, par conséquent, entre les genres arithmétique p_a et linéaire $p^{(1)}$ de F, et les genres arithmétique π_a et linéaire $\pi^{(1)}$ de F^*, nous avons les relations

$$p_a + 1 = 3(\pi_a + 1),$$
$$p^{(1)} - 1 = 3(\pi^{(1)} - 1).$$

Comme on a $p_a = 2$, $p^{(1)} = 22$, on en déduit $\pi_a = 0$ et $\pi^{(1)} = 8$.

Le système bicanonique $|2C|$ de F comprend trois systèmes linéaires partiels composés avec l'involution I_3. L'un de ceux-ci, qui comprend les courbes $2C_0$ et $C_1 + C_2$, a pour homologue sur F^* le système bicanonique de cette surface.

Le bigenre de F^* est $P_2 = 9$.

7. La courbe G contient deux séries g_3^1 découpées par les génératrices rectilignes de la quadrique contenant la courbe. On voit aisément que chacune de ces séries est transformée en elle-même par l'homographie génératrice de γ_3 et contient deux génératrices unies : celles qui appartiennent aux plans $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Considérons l'une de ces séries. Les couples de points appartenant à de mêmes groupes de la série ont pour images les points d'une courbe L_1. D'une manière précise, soient A_1, A_2, A_3 les points d'un groupe de la série g_3^1 ; les points (A_1A_2), (A_2A_3), (A_3A_1) appartiennent à la courbe L_1 et engendrent sur celle-ci une série linéaire α_3^1. En effet, à un point de L_1 correspond un couple de points de G appartenant à un groupe de g_1 et d'autre part les groupes de α_3^1 correspondent biunivoquement aux groupes de g_3^1.

La série g_3^1 possède 12 points doubles. Soient A_1 un point double, A_2 le point qui complète le groupe. A ce groupe correspond sur L_1 un groupe de la série α_3^1 ayant le point double (A_1A_2). Par conséquent, la série α_3^1 possède également 12 points doubles et la courbe L_1 est de genre quatre.

La courbe L_1 est rencontrée par les courbes K en des couples de points, par suite, d'après la formule de M. De Franchis, elle est de degré zéro.

Si A_1, A_2 est un couple de points de G appartenant à un groupe de g_3^1, l'homographie génératrice de γ_3 et son carré lui font correspondre des couples A_1', A_2' et A_1'', A_2'' appartenant également à des groupes de g_3^1. Il en résulte que la courbe L_1 appartient à l'involution I_3. Mais elle n'appartient pas à l'involution J_9.

Les 12 points de rencontre de L_1 avec K_0 forment évidemment quatre groupes de I_3. D'autre part, L_1 rencontre H_0 en six points, car la série g_3^1 contient deux groupes transformés chacun en soi par l'homographie génératrice de γ_3. Sur la surface F^*, il correspond à L_1 une courbe L_1^* de genre deux, rencontrant K^* en quatre points et H_0^* en deux points.

La courbe L_1^* n'appartient pas à l'involution J_3^1 ; il lui correspond donc sur F' une courbe L_1', de genre deux, rencontrant la courbe K_0' en quatre points.

La seconde série g_3^1 appartenant à G donne de même une courbe L_2 de mêmes caractères que L_1, ne rencontrant pas cette dernière courbe.

Liége, le 20 décembre 1943.