COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les surfaces hyperelliptiques de rang trois et de genres un,

par Lucien Godeaux, correspondant de l'Académie.

On sait que les surfaces hyperelliptiques de genres un ($p_a = P_4 = 1$) ont été étudiées d'une part par MM. F. Enriques et F. Severi (1), d'autre part par Bagnera et M. M. De Franchis (2). Ces surfaces représentent des involutions ayant un nombre fini de points unis, appartenant à une surface de Picard ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$). Nous nous proposons, dans cette note, d'étudier les systèmes de courbes tracées sur une surface hyperelliptique de rang trois et de genres un, c'est-à-dire image d'une involution d'ordre trois appartenant à une surface de Picard.

---

(1) F. Enriques et F. Severi, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (*Acta Mathematica*, 1909, t. 32, pp. 283-392; t. 33, pp. 321-399).

(2) G. Bagnera et M. De Franchis, *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti* (*Memorie della Società ital. delle Scienze*, 1908, pp. 251-343); *Le nombre* ρ *de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques et pour les surfaces irrégulières de genre zéro* (*Rendiconti del Circolo Matem. dit Palermo*, 1910, t. XXX, pp. 185-238).

Voir aussi, sur ce sujet, les mémoires de M. Piazzola-Beloch, *Sulle superficie iperellittiche di rango 3* (*Memorie della R. Accad. dei Lincei*, 1931, pp. 136-166) et de M. Verzi, *Sulla costruzione della superficie iperellittiche cicliche* (*Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo*, 1922, pp. 355-370; 1924, pp. 209-266).

Une surface Φ de genres un, d'ordre $2\pi-2$, appartenant à un espace linéaire S_π à π dimensions, à sections hyperplanes de genre π $(\pi > 3)$ est hyperelliptique de rang trois si elle possède neuf points doubles biplanaires ordinaires et s'il existe une hypersurface cubique passant par ces neuf points doubles et osculant la surface en tout point d'intersection. La courbe de contact est d'ordre $2\pi-2$ et de genre $\pi-3$; il existe deux systèmes linéaires de pareilles courbes sur la surface Φ. Il existe, en outre, sur cette surface, vingt-quatre systèmes linéaires de courbes d'ordre $2\pi-2$ et de genre $\pi-2$. En utilisant les résultats que nous avons obtenus sur les involutions, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique (1), nous établissons les relations fonctionnelles existant entre ces différentes courbes et les couples de courbes rationnelles de degré -2, équivalents aux points doubles biplanaires de la surface.

1. Soit F une surface de Picard $(p_a=-1,\ p_g=P_4=1)$ contenant une involution cyclique I_3 d'ordre trois et de genres un $(p_a=P_4=1)$. Désignons par T la transformation birationnelle de F en elle-même, génératrice de l'involution.

On sait que l'on peut construire, sur F, un système linéaire $|C_1|$ contenant trois systèmes linéaires partiels $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, $|C_{13}|$ composés au moyen de l'involution I_3, le premier étant dépourvu de points-base. Désignons par Φ la surface normale image de l'involution dont les sections

(1) Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actualités scient. et industrielles*, n° 270; Paris, Hermann, 1935). Voir en particulier les travaux suivants : *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un* (*Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70); *Recherches sur les involutions cubiques appartenant à une surface algébrique* (*Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1921, pp. 105-124); *Sur les involutions régulières d'ordre trois appartenant à une surface irrégulière* (*idem*, 1927, pp. 707-724).

hyperplanes Γ_{11} correspondent aux courbes C_{11}. Si nous désignons par π le genre des courbes Γ_{11}, le système $|\Gamma_{11}|$ a le degré $2\pi-2$ et la dimension π. Les courbes C_{11} et, par suite, les courbes C_1 ont le genre $3\pi-2$, le degré $6\pi-6$ et le système $|C_1|$ a la dimension $3\pi-4$. Nous supposerons $\pi > 3$.

L'involution I_3 possède un nombre fini de points unis. Soit A_1 un de ces points. On sait que c'est un point uni non parfait, possédant dans son domaine du premier ordre deux points unis parfaits de l'involution; soient A_{12}, A_{13} ces points. Les courbes C_{12} passent par A_1 et A_{12}, les courbes C_{13} par A_1 et A_{13}.

Soit α le nombre des points unis de l'involution I_3. Les systèmes $|\Gamma_{12}|$, $|\Gamma_{13}|$, qui correspondent respectivement sur Φ aux systèmes $|C_{12}|$, $|C_{13}|$, ont le degré $2\pi-2-\frac{2\alpha}{2}$, le genre $\pi-\frac{\alpha}{3}$ et la dimension $\pi-\frac{\alpha}{3}$. La transformation T opérant sur les courbes de $|C_1|$ comme une homographie sur un espace linéaire, on a

$$\pi+2\left(\pi-\frac{\alpha}{3}\right)+3=3\pi-4+1,$$

d'où $\alpha=9$, comme on le savait d'ailleurs. Nous désignerons par $A_1, A_2, \ldots, A_9$ les points unis de I_3 et par $A_1', A_2', \ldots, A_9'$ les points de diramation qui leur correspondent sur la surface Φ.

Les points de diramation sont, comme on sait, des points doubles biplanaires ordinaires. Chacun de ces points équivaut, au point de vue des transformations birationnelles, à l'ensemble de deux courbes rationnelles de degré -2, ayant un point commun. Nous désignerons par γ_{i2}, γ_{i3} les courbes rationnelles dont l'ensemble équivaut au point A_i'. La courbe γ_{12} correspond au domaine du point A_{12}, infiniment voisin de A_1 et la courbe γ_{13} au domaine du point A_{13}. Le point commun aux courbes γ_{12}, γ_{13} correspond aux groupes de I_3 situés dans le domaine du point A_1.

Les courbes Γ_{12} rencontrent une des courbes γ_{i2}, γ_{i3}, par exemple γ_{i2} en un point et les courbes Γ_{13} rencontrent γ_{i3} en un point. On sait que l'on a

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{12} + 2(\gamma_{12} + \gamma_{22} + \ldots + \gamma_{92}) + (\gamma_{13} + \gamma_{23} + \ldots + \gamma_{93}),$$
$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{13} + (\gamma_{12} + \gamma_{22} + \ldots + \gamma_{92}) + 2(\gamma_{13} + \gamma_{23} + \ldots + \gamma_{93}).$$

Parmi les hypersurfaces qui découpent sur Φ le système $|3\,\Gamma_{11}|$, il en est une qui oscule Φ le long d'une courbe Γ_{12} ou d'une courbe Γ_{13}.

2. Le système $|C_1|$ appartient à un système continu complet ∞^2, $\{C\}$, de courbes de genres π et de degré $2\,\pi - 2$, dont les éléments — systèmes linéaire analogues à $|C_1|$ — sont représentés par les points d'une certaine surface de Picard.

La transformation T fait correspondre à un système générique $|C|$ de $\{C\}$ un système $|\overline{C}|$ de mêmes caractères. Lorsque $|C|$ varie d'une manière continue dans $\{C\}$ et tend vers $|C_1|$, $|\overline{C}|$ varie d'une manière continue sur F et tend également vers $|C_1|$; par conséquent, le système $\{C\}$ étant complet, $|\overline{C}|$ appartient à $\{C\}$ et ce système est transformé en lui-même par T.

Le système $\{C\}$, considéré comme un ensemble de systèmes linéaires $|C|$, étant équivalent à une surface de Picard, contient neuf systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T. L'un de ces systèmes est $|C_1|$, nous désignerons les autres par $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_9|$.

Le système $|C_2|$ a le degré $6\,\pi - 6$, le genre $3\,\pi - 2$ et la dimension $3\,\pi - 4$; un système composé au moyen de I_3 et appartenant à $|C_2|$ a pour homologue, sur Φ, un système dont le degré est au plus égal à $2\,\pi - 2$ et par suite la dimension au plus égale à π; il en résulte que le système $|C_2|$ contient trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_3; nous les désignerons par $|C_{21}|$, $|C_{22}|$, $|C_{23}|$ et nous désignerons par $|\Gamma_{21}|$, $|\Gamma_{22}|$, $|\Gamma_{23}|$ les systèmes linéaires complets qui leur correspondent sur la surface Φ.

Rapportons projectivement les courbes C_2 aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{3\pi-4}$ à $3\pi-4$ dimensions. Il correspond à la surface F une surface que nous continuerons à appeler F, sur laquelle l'involution I_3 est engendrée par une homographie (homologue de T) possédant trois axes ponctuels $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$. Les hyperplans de $S_{3\pi-4}$ passant par $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ découpent sur F les courbes C_{21}; les hyperplans passant par $S^{(3)}$, $S^{(1)}$, les courbes C_{22}; enfin les hyperplans passant par $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, les courbes C_{23}. Les neuf points unis de l'involution I_3 se distribuent dans les espaces $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$; supposons qu'il y en ait α_1 sur le premier de ces axes, α_2 sur le second, α_3 sur le troisième.

Supposons que le point uni A_1 appartienne à l'axe $S^{(1)}$. Le plan tangent à F en A_1 s'appuie sur $S^{(2)}$ en un point et sur $S^{(3)}$ en un point. Les courbes C_{22} passent par A_1 et par un des point infiniment voisins de A_1, uni pour I_3; les courbes C_{23} passent par A_1 et par l'autre point du domaine de A_1 uni pour I_3. Les autres points unis de I_3 donnent lieu à des remarques analogues.

Les systèmes linéaires partiel $|C_{21}|$, $|C_{22}|$, $|C_{23}|$ ont respectivement les degrés effectifs

$$6\pi-6-2(\alpha_2+\alpha_3)=6\pi-24+2\alpha_1,\quad 6\pi-24+2\alpha_2,\quad 6\pi-24+2\alpha_3.$$

Par conséquent, les systèmes linéaires $|\Gamma_{21}|$, $|\Gamma_{22}|$, $|\Gamma_{23}|$ ont les degrés

$$2\pi-8+\frac{2\alpha_1}{3}\quad,\quad 2\pi-8+\frac{2\alpha_2}{3}\quad,\quad 2\pi-8+\frac{2\alpha_3}{3}$$

et les dimensions

$$\pi-3+\frac{\alpha_1}{3}\quad,\quad \pi-3+\frac{\alpha_2}{3}\quad,\quad \pi-3+\frac{\alpha_3}{3}\,.$$

Les courbes de ces systèmes rencontrent les courbes Γ_{11} en des groupes de $2\pi-2$ points qui ne peuvent être des groupes canoniques (ceux-ci sont découpés sur une courbe Γ_{11} par les autres courbes Γ_{11}), par conséquent, on a

$$\pi - 3 + \frac{\alpha_1}{3} \leqslant \pi - 2,$$

d'où $\alpha_1 \leqslant 3$. De même $\alpha_2 \leqslant 3$, $\alpha_3 \leqslant 3$ et, puisque $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 9$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 3$.

Nous supposerons que les points unis A_1, A_2, A_3 appartiennent à $S^{(1)}$, les points A_4, A_5, A_6 à $S^{(2)}$ et les points A_7, A_8, A_9 à $S^{(3)}$.

3. Considérons une courbe quelconque C de $\{C\}$; il lui correspond sur Φ une courbe Γ de genre $3\pi - 2$, possédant $6\pi - 6$ points doubles, variables avec la courbe Γ. Celle-ci appartient donc totalement à un système linéaire $|\Gamma|$ de genre $9\pi - 8$, de degré $18\pi - 18$ et de dimension $9\pi - 8$.

Lorsque la courbe C varie d'une manière continue dans $\{C\}$ et tend vers une courbe C_{11}, la courbe Γ varie d'une manière continue dans $|\Gamma|$ et tend vers la courbe Γ_{11} homologue de la courbe C_{11} comptée trois fois. On a donc

$$|\Gamma| = |3\Gamma_{11}|.$$

Lorsque la courbe C_t variant d'une manière continue dans $\{C\}$, tend vers une courbe C_{21}, la courbe Γ tend d'une manière continue vers la courbe Γ_{21} correspondante, comptée trois fois, augmentée des courbes rationnelles de degré -2, équivalentes aux points de diramation A_4', A_5', ..., A_9'. Les courbes Γ_{21} rencontreront en un point une de ces courbes et ne rencontreront pas l'autre. Nous écrirons

$$\begin{aligned} 3\,\Gamma_{11} \equiv 3\,\Gamma_{21} + 2\,(\gamma_{42} + \gamma_{52} + \gamma_{62}) + (\gamma_{43} + \gamma_{53} + \gamma_{63}) + \\ + (\gamma_{72} + \gamma_{82} + \gamma_{92}) + 2\,(\gamma_{73} + \gamma_{83} + \gamma_{93}). \end{aligned}$$

D'une manière parfaitement analogue, on parvient à des égalités fonctionnelles que l'on peut écrire, en disposant convenablement des courbes γ_{ik},

$$\begin{aligned} 3\,\Gamma_{11} \equiv 3\,\Gamma_{22} + 2\,(\gamma_{72} + \gamma_{82} + \gamma_{92}) + (\gamma_{73} + \gamma_{83} + \gamma_{93}) + \\ + (\gamma_{12} + \gamma_{22} + \gamma_{32}) + 2\,(\gamma_{13} + \gamma_{23} + \gamma_{33}), \\ 3\,\Gamma_{11} \equiv 3\,\Gamma_{23} + 2\,(\gamma_{12} + \gamma_{22} + \gamma_{32}) + (\gamma_{13} + \gamma_{23} + \gamma_{33}) + \\ + (\gamma_{42} + \gamma_{52} + \gamma_{62}) + 2\,(\gamma_{43} + \gamma_{53} + \gamma_{63}). \end{aligned}$$

Parmi les hypersurfaces qui découpent sur Φ les courbes Γ, il en est une qui oscule la surface le long d'une courbe Γ_{21}, ou Γ_{22} ou Γ_{23}.

Les systèmes $|\Gamma_{21}|$, $|\Gamma_{22}|$, $|\Gamma_{23}|$ ont le degré $2\pi-3$, le genre et la dimension $\pi-2$. Les courbes C_{22}, C_{23} par exemple, ont en commun les points A_1, A_2, A_3, unis de I_3, et ne se touchent pas en ces points. Les courbes Γ_{22} et Γ_{23} se rencontrent donc en $2\pi-3$ points. Il en est de même des courbes Γ_{23} et Γ_{21}, Γ_{21} et Γ_{22}.

4. Puisqu'il existe dans l'espace S_π contenant Φ une hypersurface cubique osculant cette surface le long d'une courbe Γ_{21}, la surface Φ est l'image d'une involution cyclique I_3', d'ordre trois, appartenant à une surface F_1 de genres un $(p_a = P_4 = 1)$. Les points de diramation de la correspondance (1, 3) entre Φ et F_1 sont les points A_4', A_5', ..., A_9'.

Aux courbes Γ_{11} correspondent, sur la surface F_1, des courbes Γ'_{11} de genre $3\pi-2$, appartenant à un système complet de degré $6\pi-6$ et de dimension $3\pi-2$. En rapportant projectivement ces courbes aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{3\pi-4}$ à $3\pi-2$ dimensions, nous obtenons un modèle projectif normal de la surface F_1. Sur cette surface, l'involution I_3' est engendrée par une homographie T_1, de période trois, possédant trois axes ponctuels $S^{(1)}_\pi$, $S^{(2)}_{\pi-2}$, $S^{(3)}_{\pi-2}$. Les courbes Γ'_{11} sont découpées sur F_2 par les hyperplans passant par $S^{(2)}_{\pi-2}$, $S^{(3)}_{\pi-2}$ et par conséquent ces axes ne rencontrent pas F_1. L'axe $S^{(1)}_\pi$ rencontre F_1 aux six points unis de l'involution I_3'.

Aux courbes Γ_{21} correspondent sur F_1 des courbes Γ'_{21} de genre $3\pi-2$, appartenant au système des sections hyperplanes et découpées sur F_1 par les hyperplans passant soit par les axes $S^{(4)}_\pi$, $S^{(2)}_{\pi-2}$, soit par les axes $S^{(1)}_\pi$, $S^{(3)}_{\pi-2}$ pour fixer les idées par ces deux derniers.

Les hyperplans passant par les axes $S^{(1)}_\pi$, $S^{(2)}_{\pi-2}$ de T_1 découpent, sur F_1, un système composé au moyen de l'involution I_3'. Aux courbes de ce système correspondent sur Φ des courbes X de genre $\pi-2$, formant un système linéaire complet de degré $2\pi-6$ et de dimension $\pi-2$, donnant lieu à la relation fonctionnelle

$$3\,\Gamma_{11} \equiv 3\,X + (\gamma_{42}+\gamma_{52}+\gamma_{62}) + 2\,(\gamma_{43}+\gamma_{53}+\gamma_{63}) + \\ + 2\,(\gamma_{72}+\gamma_{82}+\gamma_{92}) + (\gamma_{73}+\gamma_{83}+\gamma_{93}).$$

Les courbes X rencontrent les courbes Γ_{11} en $2\pi-2$ points; il leur correspond sur F des courbes X′ rencontrant les courbes C en $6\pi-6$ points. Les courbes X′ sont de genre $3\pi-2$ et de degré $6\pi-6$; elles appartiennent donc au système $\{C\}$ car la division sur une surface de Picard est univoque (¹). Les courbes X′ ne peuvent appartenir à l'un des systèmes $|C_1|$, $|C_2|$; elles appartiennent donc à l'un des systèmes $|C_3|, \ldots, |C_9|$, par exemple au premier. Nous désignerons par C_{31} les courbes X′ et par Γ_{31} les courbes X.

5. Aux points doubles biplanaires A_1', A_2', A_3' de Φ correspondent neuf points doubles biplanaires de F_1; nous désignerons par B_{11}, B_{12}, B_{13} ceux qui correspondent à A_1', par B_{21}, B_{22}, B_{23} ceux qui correspondent à A_2', par B_{31}, B_{32}, B_{33} ceux qui correspondent à A_3'. Nous désignerons encore par $B_4, B_5, \ldots, B_9$ les points unis de I_3', simples pour F_1, qui correspondent respectivement à $A_4', A_5', \ldots, A_9'$. En chacun de ces points, il y a deux tangentes à F_1 unies pour T_1 (et s'appuyant l'une sur $S^{(2)}_{\pi-2}$ l'autre sur $S^{(3)}_{\pi-2}$).

Aux courbes Γ_{12} correspondent sur F_1 des courbes Γ'_{12} de genre $3\pi-5$, passant par les points $B_4, B_5, \ldots, B_9$, en touchant, en chacun de ces points, une des tangentes unies de T_1. Les courbes Γ'_{12} passent par les neuf points doubles de la surface F_1 et appartiennent à un système linéaire dépourvu de points-base en des points simples de F_1.

(¹) Voir F. Severi, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (*Annales de l'Ecole Normale sup.*, 1908, pp. 449-468).

Aux courbes Γ_{23} correspondent sur F_1 des courbes Γ'_{23}, de genre $3\,\pi - 5$, passant par les points B_4, B_5, B_6, en touchant, en chacun de ces points, la tangente unie de T_1 qui ne touche pas les courbes Γ'_{12}. Les courbes Γ'_{23} passent par les neuf points doubles de F_1 en y touchant le même plan tangent à F_1 que les courbes Γ'_{12}. Les courbes Γ'_{23} appartiennent à un système linéaire dépourvu de points-base en des points simples de F_1.

Aux relations fonctionnelles liant les courbes Γ_{12}, Γ_{23} aux courbes Γ_{11} sur Φ, correspondent sur F_1, les relations fonctionnelles

$$3\,\Gamma'_{11} \equiv 3\,\Gamma'_{12} + \Delta\,, \qquad 3\,\Gamma'_{11} \equiv 3\,\Gamma'_{23} + \Delta\,,$$

Δ étant une courbe formée au moyen des courbes rationnelles de degré -2 équivalentes aux points doubles de F_1. On en conclut que les courbes $3\,\Gamma'_{12}$, $3\,\Gamma'_{23}$ sont équivalentes et, comme la division sur une surface de genres un est univoque, que les courbes Γ'_{12}, Γ'_{23} appartiennent à un même système linéaire $|D|$, de genre et de dimension $3\,\pi - 5$, de degré $6\,\pi - 12$.

Rapportons projectivement les courbes D aux hyperplans d'un espace $S_{3\pi-5}$ à $3\,\pi - 5$ dimensions; nous obtenons un modèle projectif de la surface F_1 sur lequel la transformation T_1 est déterminée par une homographie possédant trois axes ponctuels $S^{(1)}_{\pi-3}$, $S^{(2)}_{\pi-2}$, $S^{(3)}_{\pi-2}$, les hyperplans découpant les courbes Γ'_{12} passant par les deux derniers et les hyperplans découpant les courbes Γ'_{23} par les deux premiers. Les hyperplans passant par $S^{(1)}_{\pi-1}$ et $S^{(3)}_{\pi-2}$ découpent sur la surface un système linéaire composé au moyen de I_3'; à ce système correspond, sur la surface Φ, un système linéaire complet, de genre $\pi - 2$, de dimension $\pi - 2$ et de degré $2\,\pi - 6$, que nous désignerons par $|X_1|$.

Désignons respectivement par α_1, α_2, α_3 le nombre de points unis de I_3' situés dans $S^{(1)}_{\pi-3}$, $S^{(2)}_{\pi-2}$, $S^{(3)}_{\pi-2}$. D'après ce qui précède, nous avons

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 6\;, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 3.$$

Mais $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=6$, donc $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\alpha_3=3$. D'une manière précise, les points B_4, B_5, B_6 appartiennent à $S^{(2)}_{\pi-2}$ et les points B_7, B_8, B_9 à $S^{(3)}_{\pi-2}$. Les courbes qui sur F_1 correspondent aux courbes X_1 passent par les trois derniers points en y touchant les tangentes de F_1 unies pour I_3', qui ne sont pas touchées par les courbes Γ'_{12}.

En considérant sur Φ les courbes qui correspondent aux sections hyperplanes de F_1, et en faisant un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut, on trouve

$$\begin{gathered}3\Gamma_{12}+2(\gamma_{12}+\gamma_{22}+\dots+\gamma_{92})+(\gamma_{13}+\dots+\gamma_{93})\equiv\\ 3X_1+2(\gamma_{12}+\gamma_{22}+\gamma_{32})+(\gamma_{13}+\gamma_{23}+\gamma_{33})+\\ +(\gamma_{72}+\gamma_{82}+\gamma_{92})+2(\gamma_{73}+{}_{83}+\gamma_{93}).\end{gathered}$$

On en déduit

$$\begin{gathered}3\Gamma_{11}\equiv 3X_1+2(\gamma_{12}+\gamma_{22}+\gamma_{32})+(\gamma_{13}+\gamma_{23}+\gamma_{33})+\\ +(\gamma_{72}+\gamma_{82}+\gamma_{92})+2(\gamma_{73}+\gamma_{83}+\gamma_{93}).\end{gathered}$$

On trouve de même qu'aux courbes Γ_{13}, Γ_{22} de Φ correspondent sur F_1 des courbes appartenant à un même système linéaire, contenant un troisième système linéaire partiel composé avec l'involution I_3'. A ce système correspond sur Φ un système $|X_2|$ tel que

$$\begin{gathered}3\Gamma_{11}\equiv 3X_2+(\gamma_{12}+\gamma_{22}+\gamma_{32})+2(\gamma_{13}+\gamma_{23}+\gamma_{33})+\\ +2(\gamma_{42}+\gamma_{52}+\gamma_{62})+(\gamma_{43}+\gamma_{53}+\gamma_{63}).\end{gathered}$$

6. De même que nous avons construit la surface F_1 en partant du système $|\Gamma_{21}|$, nous pouvons construire une surface F_2, de genres un ($p_a=P_4=1$) en partant du système $|\Gamma_{22}|$ et une surface F_3, de genres un, en partant du système $|\Gamma_{23}|$. La correspondance (1, 3) existant entre les surfaces Φ et F_2 a pour points de diramation A_7', A_8', A_9', A_1', A_2', A_3' et la correspondance (1,3) entre Φ et F_3 les points de diramation A_1', A_2', ..., A_6'.

Entre les surfaces F_1, F_2, nous avons une correspondance (3, 3), deux points homologues correspondant à un même point de la surface Φ. Désignons par F_0 une surface dont les points représentent les couples de points de F_1, F_2

homologues dans cette correspondance. Entre les surfaces F_1 et F_0, nous avons une correspondance (1, 3) possédant neuf points de diramation B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{21}, ..., B_{33}, par conséquent, la surface F_0 est une surface de Picard ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$).

A un point de la surface Φ correspondent neuf points de la surface F_0, engendrant une involution du neuvième ordre I_9. Il est facile de voir que cette involution I_9 est composée en moyen de quatre involutions cycliques du troisième ordre, ayant respectivement pour images les surfaces F_1, F_2, F_3 et F. Les involutions ayant pour images F_2, F_3, F ont en commun trois groupes dont les points sont unis pour l'involution représentée par F_1. Les involutions représentées par F_3, F_1, F (ou par F_1, F_2, F) ont en commun trois groupes dont les points sont unis pour l'involution représentée par F_2 (ou par F_3). Par contre, les involutions représentées par F_1, F_2, F_3 n'ont aucun groupe commun et la correspondance (1, 3) existant entre F et F_0 est privée de points de diramation.

Aux courbes Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{21}, Γ_{22}, Γ_{23}, Γ_{31}, X_1, X_2 de Φ correspondent sur F_0 des courbes appartenant à un même système linéaire de degré $18\pi - 18$, de genre $9\pi - 8$ et de dimension $9\pi - 10$. Ce système contient trois systèmes partiels composés au moyen de l'involution représentée par F. A ces systèmes correspondent sur F les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$ et $|C_3|$. Il en résulte que les courbes X_1, X_2 de Φ ont pour homologues sur F les systèmes $|C_{32}|$, $|C_{33}|$. En appelant Γ_{32} les courbes X_1 et Γ_{33} les courbes X_2, on a donc les relations fonctionnelles

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{31} + (\gamma_{42} + \gamma_{52} + \gamma_{62}) + 2(\gamma_{43} + \gamma_{53} + \gamma_{63}) + \\ + 2(\gamma_{72} + \gamma_{82} + \gamma_{92}) + (\gamma_{73} + \gamma_{83} + \gamma_{93}),$$

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{32} + 2(\gamma_{12} + \gamma_{22} + \gamma_{32}) + (\gamma_{13} + \gamma_{23} + \gamma_{33}) + \\ + (\gamma_{72} + \gamma_{82} + \gamma_{92}) + 2(\gamma_{73} + \gamma_{83} + \gamma_{93}),$$

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{33} + (\gamma_{12} + \gamma_{22} + \gamma_{32}) + 2(\gamma_{13} + \gamma_{23} + \gamma_{33}) + \\ + 2(\gamma_{42} + \gamma_{52} + \gamma_{62}) + (\gamma_{43} + \gamma_{53} + \gamma_{63}).$$

7. Envisageons sur la surface F le système $|C_4|$, transformé en lui-même par T. En reprenant les raisonnements faits à propos du système $|C_2|$, on voit que le système $|C_4|$ contient trois systèmes $|C_{41}|$, $|C_{42}|$, $|C_{43}|$ composés au moyen de l'involution I_3; les courbes de chacun de ces systèmes passent par six des points unis de l'involution I_3 et chacun de ces points unis est point-base de deux de ces systèmes, les courbes de l'un d'eux y touchent l'une des tangentes à F unie pour T, les courbes de l'autre, l'autre tangente unie.

Nous désignerons par $|\Gamma_{41}|$, $|\Gamma_{42}|$, $|\Gamma_{43}|$ les systèmes linéaires, de genre et de dimension $\pi-2$, de degré $2\pi-6$, qui correspondent sur la surface Φ respectivement aux systèmes $|C_{41}|$, $|C_{42}|$, $|C_{43}|$.

Le nombre des points d'intersection des courbes C_{21} et C_{41} absorbés aux points unis de l'involution I_3 communs à ces courbes est nécessairement multiple de trois; désignons-le par $3x_1$. Les courbes Γ_{21}, Γ_{41} se rencontrent alors en $2\pi-2-x_1$ points variables. Les courbes Γ_{41} découpent donc sur une courbe Γ_{21} une série d'ordre $2\pi-2-x_1$ et de dimensions $\pi-2$; cette série appartient à une série complète dont la dimension est au moins égale à $\pi-2$, dimension de $|\Gamma_{41}|$.

Désignons par $3x_2$ le nombre de points d'intersection des courbes Γ_{21}, Γ_{42} absorbés aux points unis de I_3, par $3x_3$ le nombre de points d'intersection des courbes Γ_{21} et Γ_{43} absorbés aux points unis de I_3. Les courbes Γ_{21} passent par les six points unis A_4, A_5. ..., A_9 de I_3; chacun de ces points appartient aux courbes de deux des systèmes $|\Gamma_{41}|$, $|\Gamma_{42}|$, $|\Gamma_{43}|$ et en un de ces points, les courbes Γ_{21} sont touchées par les courbes de l'un des systèmes. Chacun des points unis A_4, A_5, ..., A_9 absorbe donc trois des intersections d'une courbe Γ_{21} et d'une courbe $\Gamma_{41}+\Gamma_{42}+\Gamma_{43}$. On a donc

$$x_1+x_2+x_3=6.$$

Soient i_1, i_2, i_3 les indices de spécialité des séries découpées respectivement sur une courbe Γ_{21} par les courbes Γ_{41}, Γ_{42}, Γ_{43}. En exprimant que les dimensions de ces séries complètes sont au moins égales à $\pi-2$, on trouve

$$x_1 \leqslant i_1+2\ , \quad x_2 \leqslant i_2+2\ , \quad x_3 \leqslant i_3+2\ ,$$

d'où $i_1=i_2=i_3=0$, $x_1=x_2=x_3=2$.

Dans les raisonnements précédents, on peut d'ailleurs remplacer $|C_{21}|$ par l'un des systèmes $|C_{22}|$, $|C_{23}|$, $|C_{31}|$, $|C_{32}|$, $|C_{33}|$. On voit donc que les points unis de I_3 communs à une courbe C_{21}, C_{22}, ..., C_{33} et à une courbe C_{41}, C_{42}, C_{43} absorbent six des points d'intersection de ces courbes.

On peut faire les hypothèses suivantes :

1° Les courbes C_{41} passent par le six points A_4, A_5, ..., A_9 sans y être tangentes aux courbes C_{21}. Mais alors les courbes C_{31} passent par les mêmes points en y touchant les courbes C_{41} et ces courbes auraient douze points d'intersection absorbés aux points considérés, ce qu'on vient de voir être impossible;

2° Les courbes C_{41} passent par cinq des points A_4, A_5, ..., A_9 en touchant les courbes C_{21} en un seul de ces points. Cette hypothèse s'élimine comme la précédente;

3° Les courbes C_{41} passent par quatre des points A_4, A_5, ..., A_9 en touchant les courbes C_{21} en deux de ces points;

4° Les courbes C_{41} passent par trois des points A_4, A_5, ..., A_9 en y touchant les courbes C_{21}. Alors, les courbes C_{41} n'auraient que trois points d'intersection avec les courbes C_{31} absorbés aux points unis de I_3.

Seule, la troisième hypothèse est donc acceptable.

8. Nous pouvons, en partant du système $|\Gamma_{41}|$, recommencer le raisonnement fait plus haut en partant du système $|\Gamma_{21}|$ et construire une surface de Picard F_0' contenant une involution de l'ordre neuf dont Φ est l'image. Cette involution est composée au moyen de quatre involutions du troisième ordre : trois sont de genres un et une a pour image la surface F. On en déduit que parmi les systèmes $|C_5|, \ldots, |C_9|$, il en est un, pour fixer les idées le premier $|C_5|$, contenant trois systèmes $|C_{51}|$, $|C_{52}|$, $|C_{53}|$ composés au moyen de I_3, tels que les courbes C_{4i}, C_{5i}, $(i=1, 2, 3)$ passant par les mêmes points unis, mais sans s'y toucher.

On sera ensuite conduit à associer les systèmes $|C_6|$ et $|C_7|$, $|C_8|$ et $|C_9|$ comme sont associés les systèmes $|C_2|$ et $|C_3|$, $|C_4|$ et $|C_5|$.

On observera que, sur la surface F_0, si l'on désigne par $|C|$ le transformé (complet) du système $|\overline{C}_1|$ de F, le système continu complet $\{\overline{C}\}$ ne possède qu'un système linéaire contenant des systèmes composés pour les quatre involutions du troisième ordre, rencontrées sur F_0.

9. Parmi les systèmes linéaires de courbes tracés sur la surface Φ et satisfaisant aux conditions imposées, se trouve le système de courbes d'ordre $2\pi - 2$ rencontrant en un point chacune des courbes γ_{12}, γ_{23}, γ_{42}, γ_{53}, γ_{72} et γ_{83}, mais ne rencontrant pas les autres courbes γ. Supposons que ce système soit $|\Gamma_{41}|$; on aura donc

$$3\Gamma_{11} = 3\Gamma_{41} + 2(\gamma_{12} + \gamma_{23} + \gamma_{42} + \gamma_{53} + \gamma_{72} + \gamma_{83}) + \\ + \gamma_{13} + \gamma_{22} + \gamma_{43} + \gamma_{52} + \gamma_{73} + \gamma_{82} \,.$$

Reprenons la surface F_1 et rappelons que les points de diramation pour la correspondance (1, 2) existant entre Φ et F_1, sont A_4', A_5', ..., A_9'.

Aux courbes Γ_{41} correspondent, sur la surface F, des courbes Γ'_{41} de genre $3\pi - 4$, passant par les points unis B_4, B_5, B_7, B_8 de l'involution I_3' et par les points (doubles biplanaires de F_1) B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{21}, B_{22}, B_{23}. Les courbes Γ'_{41} appartiennent à un système linéaire complet $|D_1|$, de degré $6\pi - 10$ et de dimension $3\pi - 4$, dépourvu de points-base (simples pour la surface F_1) ; ce système est transformé en lui-même par la transformation T_1, génératrice de I_3'.

Rapportons projectivement les courbes D_1 aux hyperplans d'un espace $S_{3\pi-4}$; nous obtenons un modèle projectif de F_1 sur lequel I_3' est engendré par une homographie T_1 ayant nécessairement trois axes ponctuels $S^{(1)}_{\pi-2}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$; les courbes Γ'_{41} étant découpées par les hyperplans passent par $S^{(2)}$, $S^{(3)}$. Les points unis B_6, B_9 de I_3' appartiennent à $S^{(1)}_{\pi-2}$; les autres points unis se distribuent sur les autres axes. Supposons que le second axe, $S^{(2)}$, contienne x_2 points unis, le troisième, $S^{(3)}$, $x_3 = 4 - x_2$.

Aux courbes transformées en elles-mêmes par T_1, découpées sur F_1 par les hyperplans passant soit par $S^{(1)}_{\pi-2}$, $S^{(3)}$, soit par $S^{(1)}_{\pi-2}$, $S^{(2)}$, correspondent sur Φ des courbes dont les genres sont respectivement

$$\pi + 1 - \frac{x_3 + 7}{3}, \quad \pi + 1 - \frac{x_2 + 7}{3}$$

On a nécessairement $x_2 = x_3 = 2$. Nous obtenons donc, sur la surface Φ, deux systèmes linéaires $|Y_2|$, $|Y_3|$ de genre et de dimension $\pi - 2$, de degré $2\pi - 6$. Ces systèmes se comporteront, aux points A_1', A_2', comme le système $|\Gamma_{41}|$.

En chaque point uni de I_3', il y a deux tangentes à F_1 unies, s'appuyant chacune sur un des axes ne contenant pas le point uni. On en déduit des relations fonctionnelles entre Γ_{41}, Y_2, Y_3. On aura par exemple

$$3\Gamma_{41} + 2(\gamma_{42} + \gamma_{53} + \gamma_{72} + \gamma_{83}) + \gamma_{43} + \gamma_{52} + \gamma_{73} + \gamma_{82} \equiv$$
$$\equiv 3Y_2 + 2(\gamma_{43} + \gamma_{62} + \gamma_{73} + \gamma_{92}) + \gamma_{42} + \gamma_{63} + \gamma_{72} + \gamma_{93}\ .$$

On en déduit

$$3\Gamma_{11} \equiv 3Y_2 + 2(\gamma_{12} + \gamma_{23} + \gamma_{43} + \gamma_{62} + \gamma_{73} + \gamma_{92}) +$$
$$+ \gamma_{13} + \gamma_{22} + \gamma_{42} + \gamma_{63} + \gamma_{72} + \gamma_{93}\ .$$

Par conséquent, le système $|Y_2|$ provient d'un des systèmes composés au moyen de I_3, appartenant à l'un des systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_9|$. Il est facile de voir que $|Y_2|$ ne peut provenir que de l'un des systèmes $|C_6|$, ..., $|C_9|$; nous supposerons que c'est le système $|\Gamma_{61}|$. De même, on peut supposer que $|Y_3|$ coïncide avec Γ_{81}. On a donc

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{61} + 2(\gamma_{12} + \gamma_{23} + \gamma_{43} + \gamma_{62} + \gamma_{73} + \gamma_{92}) +$$
$$+ \gamma_{13} + \gamma_{22} + \gamma_{42} + \gamma_{63} + \gamma_{72} + \gamma_{93}\ ,$$

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{81} + 2(\gamma_{12} + \gamma_{23} + \gamma_{52} + \gamma_{63} + \gamma_{82} + \gamma_{93}) + \\ + \gamma_{13} + \gamma_{22} + \gamma_{53} + \gamma_{62} + \gamma_{83} + \gamma_{92} \, .$$

10. On pourra procéder de même pour trouver les autres systèmes linéaires de courbes d'ordre $2\pi - 2$ tracés sur Φ; on aura

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{42} + 2(\gamma_{13} + \gamma_{32} + \gamma_{43} + \gamma_{62} + \gamma_{82} + \gamma_{93}) + \\ + \gamma_{12} + \gamma_{33} + \gamma_{42} + \gamma_{63} + \gamma_{83} + \gamma_{92} \, ,$$

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{62} + 2(\gamma_{13} + \gamma_{32} + \gamma_{52} + \gamma_{63} + \gamma_{72} + \gamma_{83}) + \\ + \gamma_{12} + \gamma_{33} + \gamma_{53} + \gamma_{62} + \gamma_{73} + \gamma_{82} \, ,$$

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{82} + 2(\gamma_{13} + \gamma_{32} + \gamma_{42} + \gamma_{53} + \gamma_{73} + \gamma_{92}) + \\ + \gamma_{12} + \gamma_{33} + \gamma_{43} + \gamma_{52} + \gamma_{72} + \gamma_{93} \, ,$$

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{43} + 2(\gamma_{22} + \gamma_{33} + \gamma_{52} + \gamma_{63} + \gamma_{73} + \gamma_{92}) + \\ + \gamma_{23} + \gamma_{32} + \gamma_{53} + \gamma_{62} + \gamma_{72} + \gamma_{93} \, ,$$

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{63} + 2(\gamma_{22} + \gamma_{33} + \gamma_{42} + \gamma_{53} + \gamma_{82} + \gamma_{93}) + \\ + \gamma_{23} + \gamma_{32} + \gamma_{43} + \gamma_{52} + \gamma_{83} + \gamma_{92} \, ,$$

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{83} + 2(\gamma_{22} + \gamma_{33} + \gamma_{43} + \gamma_{62} + \gamma_{72} + \gamma_{83}) + \\ + \gamma_{23} + \gamma_{32} + \gamma_{42} + \gamma_{63} + \gamma_{73} + \gamma_{82} \, .$$

Les relations fonctionnelles entre $|\Gamma_{11}|$ et les systèmes $|\Gamma_{5i}|$, $|\Gamma_{7i}|$, $|\Gamma_{9i}|$, $(i = 1, 2, 3)$, elles se déduiront des précédentes de la manière suivante :

Si dans le second membre de la relation fonctionnelle liant Γ_{11} aux courbes $\Gamma_{2k,\, i}$ $(k = 2, 3, 4;\ i = 1, 2, 3)$, figure la courbe $2\gamma_{j2} + \gamma_{j3}$, ou la courbe $\gamma_{j2} + 2\gamma_{j3}$, dans la relation fonctionnelle entre Γ_{11} et $\Gamma_{2k+1,\, i}$, figure la courbe $\gamma_{j2} + 2\gamma_{j3}$ ou la courbe $2\gamma_{j2} + \gamma_{j3}$. Ainsi, on aura

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{93} + 2(\gamma_{23} + \gamma_{32} + \gamma_{42} + \gamma_{63} + \gamma_{73} + \gamma_{82}) + \\ + \gamma_{22} + \gamma_{33} + \gamma_{43} + \gamma_{62} + \gamma_{72} + \gamma_{83} \, .$$

11. Nous pouvons résumer les résultats qui viennent d'être obtenus de la manière suivante :

Si une surface normale de genres un $(p_a = P_4 = 1)$, *d'ordre* $2\pi - 2$, *de l'espace* S^π *à* π *dimensions* $(\pi > 3)$, *est l'image d'une involution (nécessairement cyclique)* *d'ordre trois appartenant à une surface de Picard* ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$) :

1° *Elle possède neuf points doubles biplanaires ordinaires;*

2° *Elle contient, en dehors du système des sections hyperplanes, vingt-six systèmes linéaires de courbes d'ordre* $2\pi - 2$; *deux de genre* $\pi - 3$, *vingt-quatre de genre* $\pi - 2$.

Les courbes de genre $\pi - 3$ *passent par les neuf points doubles; les courbes de genre* $\pi = 2$ *passent par six des neuf points doubles.*

Chaque point double biplanaire de la surface équivaut à deux courbes rationnelles de degré -2 *se rencontrant en un point. Chacune de ces dix-huit courbes est rencontrée par les courbes de l'un des systèmes de genre* $\pi - 3$ *et par les courbes de huit des systèmes de genre* $\pi = 2$.

Liége, le 4 avril 1939.