EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège.*
Mai 1938, n° 5.

Sur les quadriques osculatrices à une surface,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Considérons une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u, v et une courbe γ tracée sur cette surface. Soient R_u la réglée lieu des tangentes aux asymptotiques u aux différents points de γ; R_v la réglée analogue lieu des tangentes aux asymptotiques v. En un point x de la courbe γ, on associe à celle-ci son plan osculateur σ, la quadrique Q_u osculatrice à la réglée R_u, la quadrique Q_v osculatrice à la réglée R_v. Ces quadriques ont déjà été considérées par M. Bompiani [1].

Dans cette note, nous reprenons l'étude de ces quadriques Q_u, Q_v. Ces quadriques appartiennent au système linéaire triplement infini formé par les quadriques osculatrices à la surface (x) au point x. Nous montrons qu'elles se correspondent dans une transformation quadratique.

Considérons les courbes γ ayant une tangente fixe t au point x. Les quadriques Q_u et les plans osculateurs σ à ces courbes γ se rencontrent suivant les coniques d'une quadrique Φ_u. En considérant les quadriques Q_v au lieu de Q_u, on obtient une seconde quadrique Φ_v. La quadrique Φ_u, lorsque t coïncide avec la tangente à l'asymptotique v et la quadrique Φ_v, lorsque t coïncide avec la tangente à l'asymptotique u, coïncident; on obtient ainsi la quadrique de Bompiani.

On peut aussi considérer le lieu des coniques communes aux quadriques Q_u, Q_v (en dehors des tangentes asymptotiques au point x). On obtient ainsi une quadrique Φ_t. Lorsque t coïncide soit avec la tangente à l'asymptotique u, soit avec la tangente à l'asymptotique v, on obtient la même quadrique Φ_t [2].

Si l'on considère en un point d'une surface les courbes tangentes à une asymptotique, les quadriques osculatrices aux réglées engendrées par les tangentes asymptotiques aux différents points d'une de ces courbes, le long des droites passant par le point considéré, ont en commun une conique dont le lieu, lorsque la courbe varie, est une quadrique appartenant au faisceau de Darboux et qui est indépendante de l'asymptotique considérée.

---

(1) Ein Analagon der Quadrik von Lie in der projektiven Flächentheorie (*Mathematische Zeitschrift*, 1929, t. XXIX, pp. 678-683).

(2) Nous utilisons, dans cette note, les notations et les résultats exposés dans notre travail : La théorie des surfaces et l'espace réglé (Paris, Hermann, *Actualités scientifiques et industrielles*, 1934).

1. Soit, dans un espace ordinaire, (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives normales de Wilczynski d'un point x de la surface (x) satisfont au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrables

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0, \qquad x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0,$$

où a, b, c_1, c_2 sont des fonctions de u, v différentiables autant de fois qu'il sera nécessaire, les deux premières n'étant pas identiquement nulles.

Considérons en un point x ordinaire de la surface (x), une courbe tracée sur cette surface et définie par $u=u(t)$, $v=v(t)$. A cette courbe γ, on peut attacher deux surfaces réglées : l'une R_u, est le lieu des tangentes aux asymptotiques u aux différents points de γ; l'autre, R_v, est le lieu des tangentes aux asymptotiques v aux différents points de la courbe. Désignons par Q_u la quadrique osculatrice à la réglée R_u le long de la génératrice passant par le point x; par Q_v la quadrique osculatrice à la réglée R_v le long de la génératrice passant par le même point.

Nous allons rechercher les équations des quadriques Q_u, Q_v en prenant pour tétraèdre de référence le tétraèdre de Cartan attaché au point x de la surface (x). Ce tétraèdre a pour arêtes opposées les directrices de Wilczynski de la surface. Ses sommets sont les points

$$x, \quad m = x(\log a)^{10} - 2x^{10}, \quad n = x(\log b)^{01} - 2x^{01},$$
$$y = [8ab - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]\,x + 2x^{10}(\log b)^{01} + 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11}.$$

Les coordonnées d'un point de l'espace peuvent se mettre sous la forme

$$z_1 x + z_2 m + z_3 n + z_4 y;$$

z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales du point.

2. Pour obtenir les équations des quadriques Q_u, Q_v, nous pouvons opérer de la manière suivante : Soit Q l'hyperquadrique d'un espace linéaire à cinq dimensions représentant les droites de l'espace ordinaire. Désignons par U, V les points de Q représentant les tangentes xx^{10}, xx^{01} aux asymptotiques u, v de la surface (x) au point x. Les points U, V se correspondent dans une transformation de Laplace (Tzitzeica, Bompiani) et l'on a

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0.$$

A la réglée R_u correspond sur la surface (U) la courbe γ_u d'équations $u=u(t)$, $v=v(t)$. Le plan osculateur au point U à cette courbe γ_u coupe Q suivant une conique dont les points représentent les génératrices d'un mode de la quadrique Q_u.

Cela étant, représentons par U_1, U_2,... les transformés successifs de Laplace de U dans le sens des v, par V_1, V_2,... ceux de V dans le sens des u. Le plan osculateur à la courbe γ_u au point U est déterminé par les points

$$U, \quad U^* = -2bV du + [U_1 + U(\log b)^{01}]\, dv,$$

$$\begin{aligned} U^{**} = &-2b[V_1 + V(\log ab)^{10}]\, du^2 - 2b[V(\log b)^{01} - 2aU]\, du\, dv \\ &+ [U_2 + U_1(\log b^2 h_1)^{01} + U \{(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2\} U]\, dv^2 - 2bV d^2u \\ &+ [U_1 + U(\log b)^{01}]\, d^2v. \end{aligned}$$

Un point de ce plan peut se mettre sous la forme

$$\lambda U + \mu U^* + \nu U^{**} = \eta_2 U_2 + \eta_1 U_1 + \eta_0 U + \xi_0 V + \xi_1 V_1 + \xi_2 V_2.$$

Si ce point appartient à l'hyperquadrique Q, c'est-à-dire si l'on a

$$\begin{aligned} \beta\eta_2^2 + [\eta_1 - \eta_2(\log bh_1)^{01}]^2 - 2\eta_0\eta_2 - \alpha\xi_2^2 - [\xi_1 - \xi_2(\log ak_1)^{10}]^2 \\ + 2\xi_0\xi_2 = 0, \end{aligned}$$

il lui correspond la droite commune aux plans

$$\begin{aligned} &\eta_2[z_1(\log bh_1)^{01} + \beta z_3] - \eta_1 z_1 - 2\eta_0 z_3 + 2\xi_0 z_2 \\ &\qquad + \xi_1 z_1 - \xi_2[z_1(\log ak_1)^{10} + \alpha z_2] = 0, \\ &\eta_2[z_3(\log bh_1)^{01} - z_1] - \eta_1 z_3 + 2\xi_0 z_4 - \xi_1 z_3 + \xi_2[z_3(\log ak_1)^{10} - \alpha z_4] = 0, \\ &\eta_2[z_2(\log bh_1)^{01} - \beta z_4] - \eta_1 z_2 + 2\eta_0 z_4 - \xi_1 z_2 + \xi_2[z_2(\log ak_1)^{10} - z_1] = 0, \\ &\eta_2[z_2 + z_4(\log bh_1)^{01}] - \eta_1 z_4 + \xi_1 z_4 - \xi_2[z_3 + z_4(\log ak_1)^{10}] = 0. \end{aligned}$$

On trouve ainsi, pour équation locale de la quadrique Q_u,

$$\left.\begin{aligned} (z_1 z_4 + z_2 z_3)\, dv^3 + 4bz_2 z_4\, du\, dv^2 - 4bz_3 z_4\, du^2 dv \\ + 4bz_4^2[dv\, d^2u - du\, d^2v - 2b\, du^3 + (\log ab)^{10}\, du^2 dv] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

De même, à la réglée R_v correspond sur la surface (V) la courbe γ_v d'équations $u=u(t)$, $v=v(t)$. Le plan osculateur à cette courbe au point V coupe Q suivant une conique représentant les génératrices d'un mode de la quadrique Q_v. Celle-ci a pour équation

$$\left.\begin{aligned} (z_1 z_4 + z_2 z_3)\, du^3 - 4az_2 z_4\, du\, dv^2 + 4az_3 z_4\, du^2 dv \\ + 4az_4^2[du\, d^2v - dv\, d^2u - 2a\, dv^3 + (\log ab)^{01}\, du\, dv^2] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

3. Les quadriques Q_u, Q_v appartiennent au système linéaire

$$\lambda_1(z_1z_4 + z_2z_3) + \lambda_2z_2z_4 + \lambda_3z_3z_4 + \lambda_4z_4^2 = 0,$$

formé par les quadriques ayant un contact du second ordre avec la surface (x) au point x. Ces quadriques forment, comme on sait, un système homaloïdal. Rapportons projectivement ces quadriques aux plans d'un espace S'_3 en posant [1]

$$\frac{X_1}{z_1z_4 + z_2z_3} = \frac{X_2}{z_2z_4} = \frac{X_3}{z_3z_4} = \frac{X_4}{z_4^2}.$$

On en déduit

$$\frac{z_1}{X_1X_4 - X_2X_3} = \frac{z_2}{X_2X_4} = \frac{z_3}{X_3X_4} = \frac{z_4}{X_4^2}.$$

Rappelons que la quadrique

$$z_1z_4 + z_2z_3 = 0$$

est la quadrique de Lie attachée au point x à la surface (x).

4. Ecrivons l'équation d'une quadrique Q_u sous la forme

$$\lambda_1(z_1z_4 + z_2z_3) + \lambda_2z_2z_4 + \lambda_3z_3z_4 + \lambda_4z_4^2 = 0$$

et celle d'une quadrique Q_v sous la forme

$$\mu_1(z_1z_4 + z_2z_3) + \mu_2z_2z_4 + \mu_3z_3z_4 + \mu_4z_4^2 = 0.$$

En éliminant du, dv et $du\, d^2 v - dv\, d^2 u$, on obtient les relations

$$\left.\begin{aligned} &\rho\mu_1 = \lambda_2\lambda_3, \qquad \rho\mu_2 = 16ab\lambda_1\lambda_2, \qquad \rho\mu_3 = 16ab\lambda_2\lambda_3, \\ &\rho\mu_4 = 8ab\begin{bmatrix} 2\lambda_1\lambda_4 + 16ab\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2(\log ab)^{01} \\ + 2\lambda_1\lambda_3(\log ab)^{10} \end{bmatrix}, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

et

$$\left.\begin{aligned} &\rho\lambda_1 = \mu_2\mu_3, \qquad \rho\lambda_2 = 16ab\mu_1\mu_2, \qquad \rho\lambda_3 = 16ab\mu_1\mu_3, \\ &\rho\lambda_4 = 8ab\begin{bmatrix} 2\mu_1\mu_4 + 16ab\mu_1^2 - \mu_2\mu_3 - 2\mu_1\mu_3(\log ab)^{10} \\ + 2\mu_1\mu_2(\log ab)^{01} \end{bmatrix}. \end{aligned}\right\} . \quad (4)$$

Entre les quadriques Q_u, Q_v il existe donc une correspondance birationnelle quadratique.

---

(1) Nous avons déjà eu l'occasion d'utiliser cette transformation. Voir Sur les quadriques de Moutard (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1933, pp. 100-104); Sur une propriété de la première droite de Green d'une surface (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1936, pp. 670-673).

Interprétons les λ comme coordonnées des points d'un espace (λ) et les μ comme celles des points d'un espace (μ).

Dans l'espace (λ), le système homaloïdal de la transformation a pour base les droites $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_1=\lambda_3=0$ et le point

$$\lambda_2=0,\quad \lambda_3=0,\qquad \lambda_4+8ab\lambda_1=0.$$

Au domaine de ce point correspondent, dans l'espace (μ), les points du plan $\mu_1=0$. Aux points infiniment voisins de la droite $\lambda_1=\lambda_2=0$ correspondent les points du plan $\mu_2=0$ et aux points infiniment voisins de la droite $\lambda_1=\lambda_3=0$, ceux du plan $\mu_3=0$.

De même, dans l'espace (μ), le système homaloïdal de la transformation a pour base la droite $\mu_1=\mu_2=0$, à laquelle correspond $\lambda_2=0$ dans l'espace (λ); la droite $\mu_1=\mu_3=0$, à laquelle correspond $\lambda_3=0$; enfin le point

$$\mu_2=\mu_3=0,\qquad \mu_1+8ab\mu_4=0,$$

auquel correspond le plan $\lambda_3=0$.

Les espaces (λ), (μ) étant superposés, les points unis sont donnés par

$$16ab\lambda_1^2=\lambda_2\lambda_3,\qquad \lambda_1[\lambda_2(\log ab)^{01}-\lambda_3(\log ab)^{10}]=0.$$

D'autre part, aux quadriques Q_u correspondent, dans l'espace (λ), les points du cône

$$\lambda_2^2+4b\lambda_1\lambda_3=0$$

et aux quadriques Q_v, dans l'espace (μ), les points du cône

$$\mu_3^2+4a\mu_1\mu_2=0.$$

Un point commun à ces quatre surfaces doit satisfaire aux relations

$$a\lambda_2-b\lambda_3^3=0,\qquad \lambda_2(\log ab)^{01}-\lambda_3(\log ab)^{10}=0$$

ou coïncider avec le point (0, 0, 0, 1). Le premier cas ne peut se présenter pour une surface quelconque. Le second donne la quadrique $z_4^2=0$. On voit donc qu'il n'existe pas en général une courbe tracée sur une surface telle que les quadriques Q_u, Q_v attachées à un point de cette courbe soient irréductibles et coïncident.

Observons qu'à la quadrique de Lie $(\lambda_1=1,\ \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0)$ considérée comme quadrique Q_u correspond la quadrique $z_4^2=0$. Il en est de même si la quadrique de Lie est considérée comme quadrique Q_v, ce qui est géométriquement évident.

5. Le plan osculateur à la courbe γ au point x a pour équation locale

$$\left.\begin{aligned} & z_2 du dv^2 - z_3 du^2 dv \\ & + z_4 \begin{bmatrix} (\log a)^{10} du^2 dv - (\log b)^{01} du dv^2 - 2b du^3 \\ + 2a dv^3 + du d^2 v - dv d^2 u \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Considérons les courbes γ ayant une tangente fixe au point x. Le lieu de l'intersection de la quadrique Q_u et du plan osculateur s'obtiendra en éliminant $dv\, d^2 u - du\, d^2 v$ entre les équations (1) et (5). En négligeant le plan $z_4 = 0$, on trouve la quadrique

$$\left.\begin{aligned} & (z_1 z_4 + z_2 z_3 + 8ab z_4^2) dv^3 + 8b z_4 [z_2 du dv^2 - z_3 du^2 dv] \\ & + 4b z_4^2 [(\log a^2 b)^{10} du^2 dv - (\log b)^{01} du dv^2 - 4b du^3] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

En considérant la quadrique Q_v au lieu de la quadrique Q_u, on trouve la quadrique

$$\left.\begin{aligned} & (z_1 z_4 + z_2 z_3 + 8ab z_4^2) du^3 + 8a z_4 (z_3 du^2 dv - z_2 du dv^2) \\ & + 4a z_4^2 [(\log ab^2)^{01} du dv^2 - (\log a)^{10} du^2 dv - 4a dv^3] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Si l'on considère les courbes γ tangentes à l'asymptotique v $(du = 0)$ au point x, la quadrique (6) devient

$$z_1 z_4 + z_2 z_3 + 8ab z_4^2 = 0. \quad (8)$$

Si, d'autre part, on considère les courbes γ tangentes à l'asymptotique u $(dv = 0)$ au même point, la quadrique (7) coïncide avec la même quadrique. La quadrique (8) est la quadrique de Bompiani (*loc. cit.*).

6. Une quadrique Q_u et la quadrique homologue Q_v ont en commun les tangentes asymptotiques et une conique passant par le point x, osculatrice à la surface en ce point. Le lieu de cette conique, lorsque l'on considère les courbes γ ayant même tangente au point x, est la quadrique

$$\begin{aligned} & (z_1 z_4 + z_2 z_3 - 8ab z_4^2)(a dv^3 + b du^3) \\ & + 4ab z_4^2 [(\log ab)^{10} du + (\log ab)^{01} dv] du dv = 0. \end{aligned}$$

Lorsque l'on considère les courbes γ tangentes à l'asymptotique u $(dv = 0)$ ou à l'asymptotique v $(du = 0)$, on trouve la quadrique

$$z_1 z_4 + z_2 z_3 - 8ab z_4^2 = 0, \quad (9)$$

c'est-à-dire la quadrique donnée par

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_4 + 8ab\lambda_1 = 0,$$

rencontrée plus haut.

Cette quadrique fait partie du faisceau de Darboux; elle est liée d'une manière intrinsèque au point x à la surface (x).

7. On peut observer que le carré de la transformation (3) est l'homologie

$$\frac{\lambda_1'}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2'}{\lambda_2} = \frac{\lambda_3'}{\lambda_3} = \frac{\lambda_4'}{\lambda_4 - 2\lambda_2(\log ab)^{01} + 2\lambda_3(\log ab)^{10}}$$

et le carré de la transformation (4), l'homologie

$$\frac{\mu_1'}{\mu_1} = \frac{\mu_2'}{\mu_2} = \frac{\mu_3'}{\mu_3} = \frac{\mu_4'}{\mu_4 - 2\mu_3(\log ab)^{10} + 2\mu_2(\log ab)^{01}}.$$

Ces deux homologies sont évidemment l'inverse l'une de l'autre.

Liége, le 9 mai 1938.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.