Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 1er Août 1942, nos 7-9.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE

Une congruence linéaire de cubiques gauches,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

La détermination des différents types de congruences linéaires de cubiques gauches a retenu à diverses reprises l'attention des géomètres. Veneroni a déterminé celles de ces congruences qui sont de classe un, c'est-à-dire telles qu'une droite quelconque de l'espace soit bisécante d'une seule cubique de la congruence (1). Stuyvaert a étudié les congruences linéaires représentées par une matrice à deux lignes et trois colonnes dont les éléments, formes linéaires par rapport aux coordonnées, dépendent de deux paramètres (2). Il a déterminé les congruences obtenues lorsque ces paramètres entrent au plus linéairement dans ces éléments. Sa méthode semble difficilement applicable dans les autres cas. M. Marletta a imaginé une méthode basée sur la représentation des courbes de la congruence par les points d'une surface rationnelle, s'inspirant des travaux sur les involutions planes de M. Castelnuovo et de Ferretti (3).

(1) Veneroni, *Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe* (Rend. Circ. Matem. di Palermo, 1902, t. 16) ; *Sui vari tipi di congruenze bilineari di cubiche gobbe* (Rend. Ist. Lomb., 1904).

(2) Stuyvaert, *Cinq Etudes de Géométrie analytique* (Mém. Soc. roy. des Sciences de Liége, 1907), *Congruences de cubiques gauches* (Mém. in-8o de l'Acad. roy. de Belgique, 1920), *Algèbre à deux dimensions*, (Gand, Van Rysselberghe et Rombaut, 1920.

(3) G. Marletta, *Ricerche sulle congruence di* V_{r-2} *che ricoprono semplicemente* *l'*S_r. (Atti dell'Accad. Gioenia di Catania, 1917).

Nous avons également obtenu de nombreuses congruences linéaires de cubiques gauches par différents procédés et particulièrement en utilisant des transformations birationnelles [1].

Dans cette note, nous signalons une congruence linéaire de cubiques gauches rencontrée dans une recherche d'une tout autre nature. Cette congruence est formée par les cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur deux cubiques gauches fixes, sans point commun. Elle est de classe seize.

1. Soient K_1, K_2 deux cubiques gauches n'ayant aucun point commun. Considérons les surfaces F_1, du cinquième ordre, passant doublement par K_1 et simplement par K_2.

Pour prouver l'existence de ces surfaces, considérons en premier lieu les surfaces du cinquième ordre passant doublement par K_1 et soit Q une quadrique passant par K_1. Les surfaces envisagées se partagent en deux familles : les surfaces irréductibles et les surfaces formées de la quadrique Q et d'une surface cubique passant par K_1. Les surfaces de la première famille découpent sur Q des quartiques gauches rationnelles et forment donc un système linéaire de dimension sept. Les surfaces de la seconde famille forment un système linéaire de dimension neuf, par conséquent les surfaces du cinquième ordre passant doublement par K_1 forment un système linéaire de dimension 17. Cela étant, il existe ∞^1 de ces surfaces passant par 16 points de K_2 et contenant donc simplement cette courbe.

On voit donc que les surfaces F_1 existent et forment

[1] Voir Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1909, 1911, 1921 ; *Sur les transformations birationnelles de Jonquières de l'espace* (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1922) ; Nouvelles Annales de Mathématiques, 1909, 1911 ; L'Enseignement Mathématique, 1918 ; Rend. del Circolo Matem. di Palermo, 1911 ; Verslagen van de K. Akademie te Amsterdam, 1924, 1928 ; etc.

un faisceau $|F_1|$. La base de ce faisceau est constituée par les courbes K_1, K_2 et par les dix bisécantes a_1. a_2,..., a_{10} communes à ces deux courbes.

Nous désignerons par F_2 les surfaces du cinquième ordre passant doublement par K_2 et simplement par K_1 ; elles passent également par a_1, a_2, ..., a_{10} et forment un faisceau $|F_2|$.

Une surface F_1 et une surface F_2 ont en commun, en dehors des bases, une courbe du troisième ordre variable dans une congruence linéaire. Nous allons montrer que cette courbe est une cubique gauche.

2. Les bisécantes de K_1 rencontrent encore une surface F_1 en un seul point, par conséquent, en rapportant projectivement les quadriques passant par K_1 aux droites d'un plan ϖ, on obtient une représentation plane de cette surface sur ce plan. Cette représentation a été étudiée par Clebsch [1] ; on sait qu'aux sections planes de F_1 correspondent dans ϖ les quartiques planes γ_4 passant par onze points A_0, A_1, A_2, ..., A_{10}, dont dix ne peuvent se trouver sur une même cubique plane.

La courbe double K_1 représente une involution du second ordre appartenant à une courbe γ_7, du septième ordre, passant doublement par les points A_0, A_1, ..., A_{10}.

Aux points A_0, A_1, ..., A_{10} correspondent les onze bisécantes de K_1 appartenant à la surface F_1 considérée. En particulier, à dix de ces points, pour fixer les idées à A_1, A_2, ..., A_{10}, correspondent respectivement les droites a_1, a_2, ..., a_{10}.

Les bisécantes de K_1 s'appuyant sur K_2 forment une surface d'ordre 12, passant six fois par K_1 et deux fois par les dix bisécantes a_1, a_2, ..., a_{10} communes aux deux courbes. Cette surface rencontre encore F_1, en dehors des cubiques K_1, K_2 et de ces dix bisécantes, suivant

[1] Voir par exemple F. Conforto, *Le superficie razionali* (Bologne, Zanichelli, 1939, p. 482 et suiv.).

une droite qui ne peut être que la bisécante a_0 de K_1, appartenant à la surface F_1 considérée, qui correspond au point A_0.

Il en résulte qu'à la courbe K_2 correspond dans le plan ϖ une sextique γ_6 passant simplement par A_0 et doublement par $A_1, A_2, \dots, A_{10}$.

A la section de la surface F_1 considérée par une surface F_2 correspond dans le plan ϖ une courbe d'ordre 20 passant cinq fois par chacun des points $A_0, A_1, \dots, A_{10}$, qui doit comprendre comme parties la courbe γ_7 et la courbe γ_6 comptée deux fois. Elle est complétée par une droite r passant par A_0.

La droite r correspond à la cubique commune aux deux surfaces F_1, F_2 considérées. Si cette courbe était plane, la droite r ferait partie d'une courbe γ_4 et celle-ci serait complètée par une cubique passant par $A_1, A_2, \dots, A_{10}$, ce qui est impossible. Les cubiques communes aux surfaces F_1, F_2 sont donc gauches.

La droite r rencontre la courbe γ_7 en cinq points variables et la courbe γ_6 en cinq points variables également, donc les cubiques gauches communes aux surfaces F_1, F_2 s'appuient en cinq points sur chacune des courbes K_1, K_2.

Par un point de l'espace passent une surface F_1 et une surface F_2, par conséquent une des cubiques gauches envisagées.

Les cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur deux cubiques gauches sans point commun, forment une congruence linéaire.

3. Désignons par G la congruence linéaire ainsi déterminée et par Γ les cubiques gauches qui l'engendrent.

Une courbe Γ s'appuyant en cinq points sur chacune des cubiques K_1, K_2, il existe une quadrique Q_1 passant par K_1 et une quadrique Q_2 passant par K_2, contenant la courbe Γ. L'intersection de Q_1, Q_2 est complétée par une bisécante g de Γ, sécante simple de K_1, K_2. Par un point P de Γ passe une bisécante g_1 de K_1 appartenant à Q_1 et une bisécante g_2 de K_2 appartenant à Q_2. La droite g doit s'appuyer sur g_1 et g_2 et ces deux dernières droites sont d'ailleurs des sécantes simples de Γ.

On déduit de la remarque précédente une construction de la cubique gauche de la congruence G passant par un point P de l'espace.

Par P passent une bisécante g_1 de K_1 et une bisécante g_2 de K_2. Le plan g_1g_2 coupe encore K_1 en un point P_1 et K_2 en un point P_2. La quadrique Q_1, passant par K_1 et P_1P_2, et la quadrique Q_2, passant par K_2 et par P_1P_2, se coupent encore suivant la courbe Γ de G passant par le point P.

Une quadrique Q_1 passant par K_1 coupe K_2 en six points ; par chacun de ces points passe une sécante simple de K_1 et il existe une quadrique passant par K_2 et par cette droite. On en conclut qu'une quadrique passant par K_1, ou par K_2, contient six courbes de la congruence G.

Les droites a_1, a_2, ..., a_{10} sont des droites exceptionnelles de la congruence G. Un plan passant par a_1, par exemple, coupe encore K_1 en un point P_1 et K_2 en un point P_2. Les quadriques Q_1 passant par K_1 et Q_2, passent par K_2, et ayant encore en commun la droite P_1P_2, se rencontrent encore suivant une cubique Γ de G formée de la droite a_1 et d'une conique s'appuyant en trois points sur K_1, en trois points sur K_2 et en un point sur a_1.

4. Les surfaces du septième ordre ayant la cubique gauche triple K_1 et passant simplement par K_2, sont des unisécantes des courbes Γ de G. En opérant comme précédemment pour les surfaces F_1, on voit que les surfaces du septième ordre en question découpent sur une quadrique Q passant par K_1 des courbes du cinquième

ordre dont les génératrices d'un mode de Q sont des quadrisécantes, ou bien comprennent Q comme partie et sont complétées par des surfaces cubiques passant doublement par K_1. On en conclut que les surfaces du septième ordre passant triplement par K_1 forment un système linéaire de dimension 27. Il y a ∞^5 de ces surfaces contenant K_2. Ces ∞^5 surfaces contiennent les droites $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$.

Observons encore que les surfaces F_1, F_2 découpent sur une droite quelconque de l'espace deux séries g_5^1 ayant seize couples communs. Par conséquent, la congruence G est de classe seize.