Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 11 avril 1942, nos 4-6.

GÉOMÉTRIE

Sur les foyers des congruences de courbes algébriques,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Dans un travail antérieur (1), nous avons démontré le théorème suivant :

Etant donnée une congruence de courbes algébriques C *d'ordre* n *et de genre* π, *chaque courbe de la congruence contient* $4n + 2\pi - 2$ *foyers.*

Lorsque la courbe C est l'intersection complète de deux surfaces, ce théorème se déduit immédiatement d'un théorème de Darboux (2). Lorsqu'il n'en est pas ainsi, on peut considérer les courbes C de la congruence comme appartenant à l'intersection de surfaces F_1, F_2 variables dans deux systèmes continus ∞^2. L'intersection de deux surfaces F_1, F_2 homologues est complétée par une courbe C'. Il suffit, pour établir notre théorème, d'appliquer celui de Darboux à la congruence des courbes C + C', puis de remarquer qu'un point commun aux courbes C, C' est un foyer de la courbe C + C' qu'elles composent.

Dans cette note, nous nous proposons de démontrer notre théorème d'une manière plus simple, en nous basant sur la même observation, mais en utilisant la représentation monoïdale des courbes C.

(1) Sur la théorie des congruences de courbes. (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 1921, pp. 51-61).

(2) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Deuxième partie, chap. I. (Paris, Gauthier-Villars, 1889).

1. Soit C une courbe algébrique irréductible d'ordre n et de genre π. Choisissons un trièdre de référence $Oxyz$ tel que :

1° Le point à l'infini de l'axe Oz n'appartienne pas à la courbe ;

2° Une parallèle à Oz s'appuyant sur C ne rencontre plus en général la courbe C en un second point ;

3° Aucune trisécante de C ne soit parallèle à Oz.

Dans ces conditions, la courbe C possède

$$h = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \pi$$

bisécantes parallèles à Oz.

La courbe C peut être représentée par les équations

$$f(x, y) = 0, \qquad z\psi(x, y) - \phi(x, y) = 0, \tag{1}$$

dont la première est le cylindre d'ordre n projetant la courbe parallèlement à Oz, la seconde étant un monoïde d'un certain ordre m, dont le sommet est à l'infini sur Oz.

Les surfaces (1) ont en commun la courbe C et les $n(m-1)$ parallèles à Oz communes aux cylindres

$$f(x,\ y) = 0, \qquad \psi(x,\ y) = 0$$

Les h bisécantes de C parallèles à Oz sont doubles pour le cylindre $f = 0$ et appartiennent, comme droites simples, au monoïde. Dans le plan $z = 0$, les courbes $\psi = 0$, $\phi = 0$ sont adjointes à la courbe $f = 0$ et la seconde passe par tous les points d'intersection de la première avec la courbe $f = 0$.

L'intersection des surfaces (1) se compose donc :

1° de la courbe C ;

2° des h bisécantes de C parallèles à Oz, doubles pour le cylindre, simples pour le monoïde ;

3° de $n(m-1) - 2h$ droites simples pour le cylindre et le monoïde.

2. Considérons maintenant une congruence G de courbes C. On peut choisir un trièdre de référence $Oxyz$ par rapport auquel les courbes de G satisfont généralement aux conditions imposées plus haut. Dans ces conditions, les courbes C de la congruence seront représentées par les équations (1) dont les coefficients dépendront de deux variables u, v.

Appelons R l'ensemble des h cordes de C parallèles à Oz et S l'ensemble des $n(m - 1) - 2h$ droites simples communes à $f = 0$ et au monoïde $z\psi = \phi$. Les équations (1) représentent non pas la congruence G, mais la congruence G′ engendrée par la courbe réductible $C + R + S$.

Soit Φ une surface appartenant à la congruence G (c'est-à-dire engendrée par des courbes C de la congruence) et contenant la courbe C_0. Les groupes de droites R, S associés aux courbes C de Φ engendrent une surface Φ_1 contenant les groupes R_0, S_0 associés à C_0. La surface $\Phi' = \Phi + \Phi_1$ appartient à la congruence G′.

Si P est un foyer appartenant à C_0, le plan tangent à Φ en P reste fixe lorsque Φ varie, en passant toujours par C_0. Le point P est aussi un foyer de la congruence G′.

Inversement, si P est un foyer de la congruence G′ appartenant à C_0, c'est un foyer de la congruence G, ou bien c'est un point commun à C_0 et à une des droites composant R_0 ou S_0. En un tel point en effet, les surfaces Φ' ont même plan tangent, mais non les surfaces Φ.

Les foyers de la congruence G′ situés sur la courbe C_0 sont découpés sur cette courbe, d'après le théorème de Darboux, par la surface

$$z \frac{\partial(f, \psi)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(f, \phi)}{\partial(u, v)} = 0. \tag{2}$$

Cette surface est un monoïde d'ordre $m + n$, dont le sommet est à l'infini sur Oz.

3. Soit tout d'abord s_0 une des droites du groupe S_0. La droite s_0 rencontre la courbe C_0 en un seul point P. Le plan déterminé par s_0 et par la tangente en P à la courbe C_0 est tangent à la surface Φ' et est donc un point focal de la courbe $C_0 + R_0 + S_0$. Il doit être défalqué des points de rencontre de C_0 avec la surface (2).

Soit maintenant r_0 une des droites du groupe R_0. Cette droite est double pour le cône $f = 0$ et appartient donc aux cônes

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 0, \frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

et par conséquent à la surface (2).

La courbe C_0 s'appuie en deux points P_1, P_2 sur la droite r_0. Les plans déterminés par r_0 et par les tangentes à C_0 en P_1, P_2 respectivement sont tangents à toutes les surfaces Φ' ; les points P_1, P_2 doivent donc être défalqués des points d'intersection de C_0 avec la surface (2). Mais chacun de ces points doit être compté deux fois, car la droite double r_0 peut être considérée comme position limite de deux droites simples.

Le nombre des points focaux de la congruence G situés sur la courbe C_0 est donc égal à

$$n(m + n) - 4h - [n(m - 1) - 2h] = 4n + 2\pi - 2.$$

Liège, le 28 mars 1942.