Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 3 mai 1938, n° 5.

Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

(Cinquième communication.)

Poursuivant nos recherches sur les involutions cycliques d'ordre premier appartenant à une surface algébrique (1), nous nous proposons de compléter les relations entre les genres arithmétiques, linéaires et les invariants de Zeuthen-Segre de la surface portant l'involution et de la surface image de celle-ci, dans le cas où l'involution présente des points unis dont nous avons étudié récemment la structure (2).

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Construisons sur la surface F un système linéaire $|C|$, complet, dépourvu de points-base, contenant p systèmes linéaires partiels $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_p|$, composés au moyen de l'involution I_p, dont le premier soit dépourvu de points-base. Soit Φ la surface normale image de l'involution dont les sections hyperplanes Γ_1 ont pour homologues, sur F, les courbes C_1.

(1) Voir *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1930, pp. 450-467; 1931, pp. 1131-1150, 1356-1364; 1935, pp. 338-344.

(2) Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Mém. in-8° de l'Acad. roy. de Belgique*. 1938, t. XVII).

Nous supposerons que l'involution I_p possède un point uni non parfait A tel que les courbes C_1 passant par A y acquièrent un point triple dont deux tangentes sont confondues. Nous avons établi, dans notre mémoire cité plus haut, que les courbes C_1 passant par A y ont un point triple auquel sont infiniment voisins successifs, dans une direction, $p-3$ points simples, dans une autre direction, $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles.

Le point de diramation A′ de Φ, homologue du point A, est triple pour cette surface, le cône tangent se décomposant en un cône du second ordre et en un plan contenant une génératrice du cône. La surface Φ possède une suite de η points doubles infiniment voisins successifs de A′; le dernier de ces points est conique si $p=4\eta+3$; il est biplanaire ordinaire si $p=4\eta+5$; les points précédents sont évidemment biplanaires.

Le point A′ est équivalent à un ensemble de courbes rationnelles dont l'une a le degré -3 (et représente le domaine de A′ situé sur le cône du second ordre tangent), les autres ont le degré -2. Les courbes canoniques de la surface Φ rencontrent en un point la courbe de degré -3 et ne rencontrent pas les autres.

2. La courbe rationnelle de degré -3 représente le domaine du dernier point double des courbes C_1 passant par A; par conséquent, aux courbes canoniques de Φ correspondent des courbes canoniques de F passant simplement par A et par $\frac{1}{2}(p-3)$ points infiniment voisins successifs de A. Par conséquent, si $p^{(1)}$ désigne le genre linéaire de F et $\pi^{(1)}$ celui de Φ, on a

$$p^{(1)}-1=p\,(\pi^{(1)}-1)+\frac{1}{2}(p-1)+\Delta_0, \qquad (1)$$

Δ_0 provenant éventuellement des autres points unis de l'involution I_p.

3. Soient π le genre et n le degré du système $|\Gamma_1|$ des sections hyperplanes de la surface Φ. Le système $|C|$ a alors le genre $p(\pi-1)+1$ et le degré pn.

Nous allons rechercher la relation entre l'invariant de Zeuthen-Segre I de F et celui I' de Φ.

Supposons tout d'abord $p=4\eta+3$. Considérons un faisceau de courbes Γ_1 et supposons qu'il y ait δ courbes de ce faisceau ayant un point double en point simple de Φ. La courbe du faisceau passant par le point de diramation A' possède comme composantes les $2\eta+1$ courbes rationnelles équivalentes à ce point A'. D'après ce que nous avons établi dans notre mémoire cité, il y a 2η points communs à deux de ces courbes. Il en résulte que la courbe du faisceau passant par A' équivaut à $2\eta+3$ courbes ayant un point double. Par suite, on a

$$I' = \delta + 2\eta + 3 + \delta_1 - n - 4\pi.$$

δ_1 provenant des autres points de diramation de Φ.

Pour calculer l'invariant I de F, utilisons le faisceau de courbes C_1 transformé du faisceau de courbes Γ_1 considéré sur Φ. Il y a δ courbes de ce faisceau ayant p points doubles et équivalentes à $p\delta$ courbes à point double. D'autre part, une courbe C_1 passant par A équivaut à $\frac{1}{2}(p+3)$ courbes ayant des points doubles. On a donc

$$I = p\delta + \frac{1}{2}(p+3) + \delta_2 - pn - 4p(\pi-1) - 4.$$

δ_2 provenant des autres points unis de I_p.

On en conclut, en remplaçant η par sa valeur,

$$I = pI' - \frac{1}{2}(p-1)(p-5) - \Delta_1, \qquad (2)$$

où $\Delta_1 = p\delta_1 - \delta_2$ provient des autres points unis de l'involution I_p.

Dans le cas $p=4\eta+5$, on obtient de même

$$I' = \delta + 2\eta + 4 + \delta_1 - n - 4\pi$$

et l'on retrouve, en remplaçant η par sa valeur, la formule (**2**).

4. Utilisons maintenant la relation de Noether

$$p^{(1)} + 1 = 12 p_a + 9.$$

Des relations (1) et (2), on conclut par addition, p_a étant le genre arithmétique de F et π_a celui de Φ,

$$12 (p_a + 1) = 12 p (\pi_a + 1) - \frac{1}{2} (p - 1)(p - 14) + \Delta,$$

$\Delta = \Delta_0 - \Delta_1$ provenant des autres points unis de l'involution I_p.

Liége, le 26 avril 1938.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.