Bulletin de la Classe des sciences

Surfaces non rationnelles de genres zéro

Lucien Godeaux

Résumé

Construction de surfaces de genres arithmétique et géométrique nuls, ayant un système bicanonique de dimension $P_2 - 1 = 3$, 4 ou 5, supposé irréductible.

COMMUNICATIONS D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Surfaces non rationnelles de genres zéro

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction de surfaces de genres arithmétique et géométrique nuls, ayant un système bicanonique de dimension $P_2 - 1 = 3$, 4 ou 5, supposé irréductible.

I

Lorsque Castelnuovo a démontré que les conditions de rationnalité d'une surface algébrique étaient $p_a = P_2 = 0$, il a construit une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$. A la même époque Enriques construisait la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, qui a également les genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$. La question était posée: Déterminer les surfaces non rationnelles de genres $p_a = p_g = 0$?

La solution de cette question semble difficile et pendant longtemps, on s'est borné à chercher à construire des modèles de surfaces répondant à la question. Nous avons construit une surface du septième ordre, ayant pour arêtes doubles tacnodales les côtés d'un quadrilatère gauche, de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2$ (1). M. Campedelli a ensuite construit des plans doubles dont le bigenre atteignait la valeur $P_2 = 3$ (2). Il semble que ce soit M. Burniat qui se soit le plus rapproché

(1) *Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux* (Rendiconti Accademia dei Lincei, 2° sem, 1931, pp. 479-481), *Sur les surfaces de genre arithmétique et géométrique nuls dont le genre linéaire est égal à deux* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1932, pp. 26-37).

(2) CAMPEDELLI, *Sui piani doppi con curva di diramazione dell'ottavo ordine* (Rendiconti della Accad. dei Lincei, 1° sem. 1932, pp. 203-208). *Sui piani doppi con curva di*

de la solution générale en construisant des plans quadruples abéliens de genres $P_2 = 3, 4, ..., 7$ [1].

Voici quelques années, nous avons repris la question en considérant les surfaces qui ont un système bicanonique irréductible, de dimension au moins égale à deux [2] en supposant toutefois $P_2 \leqslant 10$, formule que nous avions établie autrefois [3]. Dans une note récente nous avons construit la surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 3$ [4], qui semble être le modèle général. Un cas particulier était connu [5].

Dans cette note, nous nous proposons de construire des surfaces pour lesquelles on a $P_2 = 4$ ou 5.

1. Soit dans un plan σ, γ_6 une courbe irréductible d'ordre six, non hyperellitique, privée de séries linéaires g_3^1, g_5^2, possédant d points doubles ordinaires et de genre impair. Nous désignerons celui-ci par $2\nu + 1$ et nous avons

$$2\nu + 1 = 10 - d.$$

Les adjointes à la courbe γ_6 sont les cubiques γ_3 passant par les d points doubles; elles forment un système de dimension 2ν. Rapportons projectivement ces courbes aux hyperplans d'un espace $S_{2\nu}$ à 2ν dimensions. Il correspond au plan σ une surface F_0, à sections hyperplanes elliptiques, d'ordre $9 - d = 2\nu$. A la courbe γ_6, il correspond une courbe C, d'ordre 4ν, de genre $2\nu + 1$, dont la série canonique est découpées par les hyperplans (courbe projectivement canonique).

---

diramazione dell decimo ordine (*Idem*, pp. 358-362), *Sopra alcuni piani doppi con curva di diramazione del decimo ordine* (*Idem*, pp. 536-542).

(1) BURNIAT, *Surfaces algébriques régulières de genre géométrique* $p_g = 0,1,2,3$ *et de genre linéaire* $p^1 = 3,4,...,8p_g + 7$ (Troisième Colloque de Géométrie algébrique, Bruxelles, 1959), Louvain 1960, pp. 129-145, *Sur les surfaces de genre* $P_{12} > 1$ (Annali di Matematica, 1966, tome LXXI, pp. 1-24).

(2) *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1965, pp. 25-39). *Surfaces privées de courbe canonique possédant un système bicanonique irréductible* (Convegno Federigo Enriques, Milano, 1973, pp. 101-107).

(3) *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (Paris, Hermann, 1934). Voir pp. 32-33.

(4) *Construction d'une surface de genres arithmétique et géométrique nuls, de bigenre trois* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1974, pp. 000).

(5) *Sur la construction de surfaces non rationnelles de genres zéro* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1949, pp. 688-693).

A la section de F_0 par une hyperquadrique, correspond dans le plan σ une courbe d'ordre six passant doublement par les d points doubles de γ_6. Dans le système formé par ces courbes, se trouve la courbe γ_6 elle-même.

On sait qu'une courbe projectivement canonique de genre π appartient à $(\pi - 2)(\pi - 3) : 2$ hyperquadriques de l'espace ambiant, linéairement indépendantes [1]. Donc la courbe C appartient à $(\nu - 1)(2\nu - 1)$ hyperquadriques de $S_{2\nu}$ linéairement indépendantes. Ces hyperquadriques, sauf l'une d'elles, qui correspond à la courbe γ_6 passant par F_0.

Nous arrivons donc au théorème suivant: *Une courbe projectivement canonique, non hyperelliptique, de genre* $2\nu + 1$ $(\nu \leqslant 4)$, *ne contenant ni une série linéaire* g_3^1, *ni une série linéaire* g_5^2 *est la section d'une surface à sections hyperplanes elliptiques par une hyperquadrique* [2].

2. Supposons que la courbe C de $S_{2\nu}$ soit transformée en elle-même par une homographie harmonique H donnant sur la courbe une involution privée de points unis. Cette homographie possède deux axes ponctuels: l'un, σ_ν, a la dimension ν et l'autre, $\sigma_{\nu-1}$, a la dimension $\nu - 1$. Les hyperplans passant par le second axe découpent sur C la série transformée de la série canonique la courbe image de l'involution, courbe qui est genre $\pi = \nu + 1$.

Désignons par $y_0, y_1, \ldots, y_\nu$ les coordonnées des points de σ_ν et par $z_0, z_1, \ldots, z_{\nu-1}$ celles des points de $\sigma_{\nu-1}$, de sorte qu'un point de $S_{2\nu}$ a pour coordonnées des y, z. Les équations de l'homographie H s'écrivent

$$\rho y_i' = y_i, \qquad (i = 0,1,\ldots,\nu)$$

$$\rho z_i' = -z_i. \quad (i = 0,1,\ldots,\nu - 1).$$

La courbe C appartient à $(\nu - 1)(2\nu - 1)$ hyperquadriques linéairement indépendantes de $S_{2\nu}$ et ne peut rencontrer les axes de H. Parmi ces hyperquadriques, il y en a au moins ν qui sont de la forme

$$\varphi_i(y_0,y_1,\ldots,y_\nu) + \psi_i(z_0,z_1,\ldots,z_{\nu-1}) = 0,$$

où les φ et les ψ sont des formes quadratiques de leurs arguments.

(1) Enriques-Chisini, *Lezioni sulle teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche,* tome III (Bologne, Zanichelli, 1924).

(2) *Sur les courbes projectivement canoniques* (Nieuw Archief voor Wiskunde). Sous presse.

D'après ce qu'on vient de voir, les $(\nu - 1)(2\nu - 1)$ hyperquadriques contenant C, sauf une, contiennent la surface F_0. Nous écrirons l'équation de cette dernière hyperquadrique sous la forme

$$\varphi(y) + \psi(z) = 0.$$

3. Supposons que l'espace $S_{2\nu}$ soit un hyperplan d'un espace $S_{2\nu+1}$ à $2\nu + 1$ dimensions et soit dans cet espace un espace σ'_ν qui rencontre $S_{2\nu}$ suivant l'espace $\sigma_{\nu-1}$ mais ne rencontre pas σ'_ν. Nous désignerons par $z_0, z_1, \ldots, z_\nu$ les coordonnées des points de σ_ν et nous désignerons par H l'homographie d'équations

$$\rho y'_i = y_i, \ \rho z'_i = -z_i, \quad (i = 0, 1, \ldots, \nu)$$

qui donne dans $S_{2\nu}$ l'homographie H.

La surface F_0 de $S_{2\nu}$ est l'intersection de cet espace avec une variété conique V_0, à trois dimensions, dont le sommet est le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf z_ν. Cette variété est transformée en soi par l'homographie H.

Considérons d'autre part une hypersurface d'équation

$$y_0[f_3(y) + f_{1.2}(y;z)] + [\varphi(y) + \psi(\tau)]^2 = 0,$$

où f_3 est une forme cubique et $f_{1.2}$ une forme linéaire en y dont les coefficients sont des formes quadratiques en z. Cette hypersurface est transformée en soi par H et coupe V_0 suivant une surface F, d'ordre 8ν, transformée en soi par H. Sur F, cette homographie détermine une involution I d'ordre deux, privée de points unis, si f_3 et $f_{1.2}$ sont choisies suffisamment générales.

4. La section de la surface F par l'hyperplan $y_0 = 0$ est la courbe C comptée deux fois. Nous désignerons dorénavant cette courbe par C_1 et les sections hyperplanes de F par C_2. Nous avons donc

$$C_2 \equiv 2C_1.$$

D'autre part la courbe C_1 étant projectivement canonique, son adjoint est le système des sections hyperplanes et on a

$$C'_1 \equiv C_2.$$

On déduit de ces relations

$$C'_2 \equiv C_1 + C'_1 \equiv C_1 + C_2.$$

d'où

$$C'_2 - C_2 \equiv C_1$$

et C_1 est une courbe canonique, d'ailleurs unique par construction, de la surface F.

5. Soit Φ une surface image de l'involution I existant sur F et Γ_1 la courbe qui correspond sur cette surface à la courbe C_1. La courbe Γ_1 est de genre $\pi = \nu + 1$.

Dans le système des sections hyperplanes $| C_2 |$ de F, il y a deux systèmes appartenant à l'involution I. L'un, que nous désignerons par $| \overline{C}_2 |$ est découpé par les hyperplans passant par σ'_ν, il a la dimension ν. L'autre, que nous désignerons par $| C_2^+ |$, est découpé par les hyperplans passant par σ_ν, il a la dimension ν.

Sur la courbe C_1, la série canonique contient deux séries linéaires appartenant à l'involution I. L'une, $| C_1\overline{C}_2 |$, est la transformée de la série canonique de la courbe Γ_1, l'autre, $| C_1C_2^+ |$, est la transformée d'une série paracanonique de Γ_1.

Désignons par $\bar{\Gamma}_2$ les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes $\overline{C}_2$ et par Γ_2 celles qui correspondent aux courbes C_2^+.

Les courbes $\bar{\Gamma}_2$ découpent sur la courbe Γ_1 la série canonique et on a

$$\Gamma'_1 \equiv \bar{\Gamma}_2.$$

Si la surface possède une courbe canonique, ce ne peut être que Γ_1. Comme le système $| \bar{\Gamma}_2 |$ est l'adjoint à la courbe Γ_1, c'est le système bicanonique de Φ et on a $\bar{\Gamma}_2 \equiv 2\Gamma_1$.

D'autre part, le système $| \Gamma_2 |$ contient la courbe Γ_1 comptée deux fois et on aurait donc $\Gamma_2 \equiv \bar{\Gamma}_2$, ce qui est absurde. Il en résulte que la surface Φ est dépourvue de courbe canonique.

D'après ce qu'on vient de voir, le système $| \bar{\Gamma}_2 |$ ne peut être le système bicanonique de Φ et celui-ci est donc le système $| \Gamma_2 |$. Ce système contient les courbes qui correspondent aux courbes C_2^+ et en outre la courbe $2\Gamma_1$; on a donc $P_2 = \nu + 1$. On a aussi évidemment $p^{(1)} = P_2 = \pi$.

6. Le genre de γ_6 est au plus égal à 10 et on a donc $\nu \leqslant 4$.

Les surfaces Φ qui viennent d'être construites semblent être les plus générales satisfaisant aux conditions imposées, sauf dans le cas $\nu = 4$.

Elles semblent en tout cas être plus générales que les plans quadruples de M. Burniat, ce qui justifie la publication de cette note. Dans le cas $\nu = 4$, il existe une surface à sections hyperplanes elliptiques distincte de la surface F_0 considérée plus haut. C'est la surface qui représente les quartiques ayant deux points doubles. Considérons dans le plan σ une courbe γ_7 d'ordre sept, possédant deux points triples O_1, O_2. On a alors $\nu = 4$ et les adjointes à γ_7 sont les quartiques passant deux fois par les points O_1, O_2. En rapportant projectivement ces courbes aux hyperplans d'un espace $S_{2\nu}$ à 2ν dimensions, on obtient une nouvelle surface F_0 en partant de laquelle on peut répéter mot pour mot le raisonnement fait plus haut et que nous ne reproduirons pas.

De ce qui précède, on conclut que:

Il existe des surfaces présentant les caractères $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 3, 4$ ou 5, *dont le systéme bicanonique est irréductible.*

7. Le système tricanonique est donné par

$$|\Gamma_3| = |\Gamma'_2| = |\Gamma_1 + \Gamma'_1| = |\Gamma_1 + \bar{\Gamma}_2|$$

et le système tétracanonique par

$$|\Gamma_4| = |4\Gamma_1| = |2\Gamma_2|.$$

On a également

$$|\Gamma_4| = |4\Gamma_1| = |2\Gamma_2|$$

et par conséquent

$$|2\Gamma_2| = |2\bar{\Gamma}_2|.$$

Les systèmes $|\Gamma_2|$ et $|\bar{\Gamma}_2|$ étant certainement distincts, on en conclut que le diviseur de Severi des surfaces Φ est égal à deux.

II

Dans nos travaux cités plus haut, nous avons démontré qu'une surface Φ de genres $p_a = p_g = 0$ ayant un système bicanonique irréductible de dimension au moins égale à deux, était l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface ayant une courbe canonique isolée. Dans la démonstration, nous nous étions servi du fait que le genre linéaire $p^{(1)}$ de la surface Φ était au plus égal à 10. Dans le cas de la surface Φ, la formule classique de Picard devient en effet

$$\rho_0 + \rho = 11 - p^{(1)},$$

ρ étant le nombre-base de la surface et ρ_0 le nombre des intégrales doubles distinctes. Actuellement, on a $\rho_0 \geqslant 0$, $\rho \geqslant 1$, d'où $P_2 = p^{(1)} \leqslant 10$. On peut d'ailleurs remarquer que si l'on fait $p^{(1)} = 10$ dans la formule de Noether

$$p^{(1)} + I = 12p_a + 9,$$

l'invariant de Zeuthen-Segre est $I = -1$, valeur qui convient aux surfaces rationnelles.

Dans ce travail, nous construisons des surfaces Φ pour lesquelles le bigenre P_2 est aussi grand que l'on veut, de sorte que nous obtenons le théorème suivant:

Il existe des surfaces algébriques de genres $p_a = p_g = 0$ *dont le système bicanonique est irréductible, de dimension au moins égale à deux, quel que soit le bigenre* $P_2 > 2$.

Chemin faisant, nous établissons un théorème sur les courbes projectivement canonique (n° 9) qui nous paraît présenter un certain intérêt.

8. Soit dans le plan σ une courbe irréductible γ_n d'ordre $n \geqslant 7$, non hyperelliptique, dépourvue de séries linéaires g_3^1, g_5^2 ayant d points doubles ordinaires, de genre impair

$$2\nu + 1 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d.$$

Les adjointes à γ_n sont les courbes d'ordre $n - 3$ passant par les d points doubles; elles forment un système de dimension 2ν. Rapportons projectivement ces courbes aux hyperplans d'un espace $S_{2\nu}$ à 2ν dimensions. Il correspond au plan σ une surface F_0 et à la courbe γ_n une courbe C d'ordre 4ν sur laquelle les hyperplans découpent la série canonique (Courbe projectivement canonique).

Aux sections de F_0 par des hyperquadriques correspondent dans le plan σ des courbes d'ordre $2n - 6$ passant doublement par les d points doubles. Certaines de ces courbes contiennent comme partie la courbe γ_n et sont complétées par les courbes d'ordre $n - 6$ du plan

σ. Donc à la section de F_0 par une hyperquadrique contenant la courbe C mais non F_0 correspond dans σ une courbe d'ordre $n - 6$. Il en résulte que le nombre de ces hyperquadriques linéairement indépendantes est égal à $(n - 4)(n - 5) : 2$.

A une courbe d'ordre $n - 6$ du plan σ correspond sur F_0 une courbe d'ordre $(n - 3)(n - 6)$, donc si m est l'ordre de la surface F_0, on a

$$2m = 4v + (n - 3)(n - 6).$$

9. Les hyperquadriques linéairement indépendantes passant par la courbe C sont au nombre de $(v - 1)(2v - 1)$. Il en résulte que le nombre des hyperquadriques linéairement indépendantes passant par F_0 est égal à

$$r = (v - 1)(2v - 1) - \frac{1}{2}(n - 4)(n - 5).$$

Ce nombre est positif pour les valeurs admises pour v et n.

Supposons en effet n fixe et v augmenté d'une unité. La dimension du système est

$$r' = v - 1 - \frac{1}{2}(n - 4)(n - 5)$$

et on a

$$r' - r = 4v - 1 > 0.$$

Supposons maintenant que v soit fixe et n augmenté d'une unité. On a

$$r'' = (v - 1)(2v - 1) - \frac{1}{2}(n - 3)(n - 4),$$

d'où

$$r'' - r = n - 4 > 0$$

puisque $n \geqslant 7$.

Dans le cas le plus simple admis, on a $n = 7$, $v = 4$, d'où $r = 18$ et par conséquent, on a toujours $r > 0$.

On peut déduire de ce qui précède que *la courbe projectivement canonique* C *est l'intersection de la surface* F_0 *et de trois hyperquadriques n'appartenant pas à un même faisceau.*

10. Supposons que la courbe G soit transformée en elle-même par une homographie harmonique H donnant sur la courbe une série

privée de points unis. L'homographie H possède deux axes ponctuels σ_ν de dimension ν et $\sigma_{\nu-1}$ de dimension $\nu - 1$. Si nous désignons par $y_0, y_1, \ldots, y_\nu$ les coordonnées des points de σ_ν et par $z_0, z_1, \ldots, z_{\nu-1}$ celles des points de $\sigma_{\nu-1}$, les équations de l'homographie H peuvent s'écrire

$$\rho y_i' = y_i, \qquad (i = 0,\mathrm{L},\ldots,\nu)$$

$$\rho z_i' = -z_i. \quad (i = 0,1,\ldots,\nu - 1)$$

Puisque la courbe C ne peut rencontrer les axes de H, parmi les hyperquadriques contenant C, il y en a au moins $\nu(\nu + 1)$ de la forme

$$\varphi_i(y_0,y_1,\ldots,y_\nu) + \psi_i(z_0,z_1,\ldots,z_{\nu-1}) = 0.$$

Observons que la surface F_0 est transformée en soi par H, puisqu'à une série linéaire de sections hyperplanes correspond une série linéaire analogue.

11. Supposons que l'espace $S_{2\nu}$ appartienne à un espace $S_{2\nu+3}$ à $2\nu + 3$ dimensions. Désignons par $\sigma_{\nu+1}$ un espace à $\nu + 1$ dimensions rencontrant $S_{2\nu}$ suivant l'espace σ_ν et par $\sigma'_{\nu+1}$ un espace à $\nu + 1$ dimensions rencontrant $S_{2\nu}$ suivant l'espace $\sigma_{\nu-1}$, les deux espaces, ne se rencontrant pas.

Si nous désignons par $y_0, y_1, \ldots, y_\nu, y_{\nu+1}$ les coordonnées des points de $\sigma_{\nu+1}$ et par $z_0, z_1, \ldots, z_{\nu-1}, z_\nu, z_{\nu+1}$ celles des points de $\sigma'_{\nu+1}$, les équations

$$\rho y_i' = y_i, \; \rho z_i' = -z_i,$$

représentent une homographie harmonique qui dans $S_{2\nu}$ donne l'homographie H et que nous désignerons aussi par H.

Désignons par A le point de $S_{\nu+3}$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf $y_{\nu+1}$ et par B_1, B_2 les points de $S_{2\nu+3}$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf respectivement z_ν et $z_{\nu+1}$.

Dans l'espace $S_{2\nu+3}$, les équations de la surface F_0 représentent une variété conique V_0 projetant la surface du triangle AB_1B_2 variété à cinq dimensions.

Désignons par Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 trois hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H et dont l'équation se réduit respectivement aux équations

$$\varphi_1(y) + \psi_1(z) = 0, \; \varphi_2(y) + \psi_2(z) = 0, \; \varphi_3(y) + \psi_3(z) = 0,$$

de trois hyperquadriques de $S_{2\nu}$ passant par C n'appartenant pas un même faisceau.

Les hyperquadriques Ψ_2, Ψ_3 coupent la variété V_0 suivant une variété V'_0 à trois dimensions transformée en soi par H.

Considérons enfin l'hypersurface d'équation

$$y_{\nu+1}F_0 + z_\nu F_1 + z_{\nu+1}F_2 + \Psi_1^2 = 0,$$

où F_0, F_1, F_2 sont des formes du troisième degré en y, z, transformées en elles-même par H.

Cette dernière hypersurface coupe la variété V'_0 suivant une surface F transformée en soi par H. Sur la surface F, H détermine une involution I, du second ordre privée de points unis.

Désignons dorénavant par C_1 la courbe C et par C_2 les sections de la surface F par les espaces à 2ν dimensions.

L'espace donné par $y_{\nu+1} = z_\nu = z_{\nu+1} = 0$, c'est-à-dire l'espace $S_{2\nu}$ coupe la surface F suivant la courbe C_1 comptée deux fois et on a donc

$$C_2 \equiv 2C_1.$$

D'autre part les courbes C_2 de $S_{2\nu}$ coupent la courbe C_1 suivant les groupes canoniques de cette courbe, donc on a

$$C'_1 \equiv C_2.$$

On en déduit comme plus haut

$$C'_2 - C_2 \equiv C_1,$$

donc C_1 est une courbe canonique de F d'ailleurs unique par construction.

12. Soit Φ une surface image de l'involution I et Γ_1 la courbe qui correspond sur Φ à la courbe C_1. La courbe Γ_1 a le genre $\pi = \nu + 1$.

Désignons par $\overline{C}_2$ les courbes découpées par les espaces à $2\nu - 1$ dimensions passant par $\sigma_{\nu-1}$ et par C_+ les courbes C_2 découpées par les hyperplans passant par σ_ν. Soient $\overline{\Gamma}_2$ et Γ_2 les courbes qui leur correspondent respectivement sur Φ.

Si Φ avait une courbe canonique, ce ne pourrait être que Γ_1. Son adjoint $|\overline{\Gamma}_2|$ serait alors le système bicanonique et on aurait $\overline{\Gamma}_2 \equiv 2\Gamma_1$. Or dans le système $|\Gamma_2|$ se trouve la courbe $2\Gamma_1$ et on aurait les courbes $\bar{\Gamma}_2$ et Γ_2 appartenant à un même système linéaire, ce qui est absurde.

Nous avons

$$\Gamma_2 \equiv 2\Gamma_1, \ \Gamma_1' \equiv \bar{\Gamma}_2$$

et le système bicanonique de Φ est le système $|\Gamma_2|$. Il a la dimension $\nu = \pi - 1$ et on a donc $P_2 = \pi$.

Comme dans le premier cas, on a

$$|\Gamma_3| = |\Gamma_1 + \Gamma_1'| = |\Gamma_1 + \bar{\Gamma}_2|, \ |\Gamma_4| = |\Gamma_1' + \bar{\Gamma}_2| = |2\bar{\Gamma}_2|$$

et d'autre part

$$|\Gamma_4| = |2\Gamma_2| = |2\bar{\Gamma}_2|$$

de sorte que le diviseur de Severi de la surface Φ est égal à deux.

Liège, le 21 octobre 1974.