Bulletin de la Classe des sciences

Remarques sur les surfaces liées à une suite de Laplace périodique

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination des conditions, sous une nouvelle forme, pour que la suite de Laplace associée à une surface soit périodique.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Remarques sur les surfaces liées à une suite de Laplace périodique

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination des conditions, sous une nouvelle forme, pour que la suite de Laplace associée à une surface soit périodique.

On sait que si (x) est une surface rapportée à ses asymptotiques u, v, les points $U = | x\ x_u |$, $V = | x\ x_v |$ qui représentent les droites xx_u, xx_v sur l'hyperquadrique Q de Klein dans S_5 sont transformés de Laplace l'un de l'autre (Bompiani, Tzitzeica). Ces points appartiennent à une suite de Laplace L associée à la surface (x). Nous avons à plusieurs reprises examiné le cas où la suite L est périodique et établit les conditions analytiques pour qu'il ne soit ainsi [1]. Dans cette note, nous considérons le même problème vu sous un angle différent.

Soit

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots$$

la suite de Laplace L, où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. Seuls les points U, V appartiennent en général à l'hyperquadrique Q de Klein. Nous établissons le théorème suivant:

Si U^{n+2} *et* V^{n+2} *sont les premiers points des suites* $U^1, U^2, \ldots$ *et* $V^1, V^2, \ldots$ *qui appartiennent à l'hyperquadrique* Q, *la suite* L *est périodique et les points* U^{n+3}, V^{n+3} *coïncident respectivement avec les points* V^{n+2}, U^{n+2}. *Ces points représentent les tangentes* yy_u, yy_v *à une surface* (y) *dont les courbes* u, v *sont les asymptotiques. La quadrique* Φ_n *dont les génératrices rectilignes sont représentées par les sections de* Q *par*

[1] *La géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé* (Mémoires in-8° de l'Académie roy. de Belgique, 1964, 84 pages). *Recherches sur les surfaces associées à des suites de Laplace périodiques* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1964, pp. 842-849, 920-925, 1121-1216, 1967, pp. 1324-1331).

les plans $U^nU^{n+1}U^{n+2}$, $V^nV^{n+1}V^{n+2}$ *a un contact du troisième ordre avec la surface* (y) *au point* y.

1. Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. Désignons par $U = | x\ x_u |$, $V = | x\ x_v |$ les points de l'hyperquadrique Q de Klein qui représentent les tangentes xx_u, xx_v. On sait que ces points appartiennent à une suite de Laplace L,

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots \qquad \text{(L)}$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

En général, seuls les points U, V appartiennent à Q. Supposons que le point U^{n+2} soit le premier point de la suite $U^1, U^2, \ldots$ qui appartienne à Q.

Les plans $U^{n+1}U^{n+2}U^{n+3}$ et $V^{n+1}V^{n+2}V^{n+3}$ sont conjugués par rapport à Q. Aux sections de Q par ces plans correspondent les génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique Φ_{n+1}. Actuellement, le premier de ces plans est tangent à Q en U^{n+2} et rencontre donc cette hyperquadrique suivant deux droites r_1, r_2 passant par U^{n+2}. La quadrique Φ_{n-1} est donc dégénérée en deux faisceaux de rayons (R_1,ρ_1), (R_2,ρ_2). La section de Q par le plan $V^{n+1}V^{n+2}V^{n+3}$ est donc dégénérée en deux droites s_1, s_2 qui représentent les faisceaux de rayons (R_2,ρ_1), (R_1,ρ_2). La droite R_1R_2 est représentée par le point U^{n+2} qui appartient donc au plan $V^{n+1}V^{n+2}V^{n+3}$.

Supposons maintenant que le point V^{n+2} appartienne à Q et soit le premier point de la suite $V^1, V^2, \ldots$ ayant cette propriété. Alors ce point appartient au plan $U^{n+1}U^{n+2}U^{n+3}$ et les droites r_1, r_2, s_1, s_2 sont confondues en une seule droite $U^{n+2}V^{n+2}$, qui appartient à Q.

La droite $U^{n+2}V^{n+2}$ représente un faisceau de rayons (y,η) et la quadrique Φ_{n+1} est formée de ce faisceau compté deux fois.

2. Lorsque u, v varient, le point y décrit une surface (y). Les points $\overline{U} = | y\ y_u |$, $\overline{V} = | y\ y_v |$ appartiennent à la droite $U^{n+1}V^{n+2}$. Supposons qu'ils soient distincts de ces derniers points.

La droite $U^{n+2}V^{n+2}$ est l'intersection des plans $U^{n+2}U^{n+2}U^{n+3}$ et $V^{n+1}V^{n+2}V^{n+3}$.

Le point $\overline{U}$ appartenant au premier de ces plans, la droite $\overline{U}\overline{U}_u$ rencontre en un point P la droite $U^{n+1}U^{n+2}$. Appartenant au second plan, la droite $\overline{U}\overline{U}_u$ rencontre la droite $V^{n+2}V^{n+3}$ en un point P. Cette droite $\overline{U}\overline{U}_u$ touche Q en $\overline{U}$ et les points P, P′ étant conjugués par rapport à Q, la droite $\bar{U}U_u$ appartient à Q. Pour des raisons analogues, la droite $\bar{U}U_v$ appartient à Q. Les droites $\bar{U}U_u$, $\bar{U}U_v$ représentent des faisceaux de rayons qui doivent coïncider avec le faisceau (y,η). On arrive ainsi à une absurdité et le point $\bar{U}$ coïncide avec un des points U^{n+2}, V^{n+2}. Il en est de même de $\bar{V}$. Le point U^{n+1} étant le transformé de U^{n+2} dans le sens des u, le transformé de U^{n+2} dans le sens des v appartient à la droite $U^{n+2}V^{n+2}$. De même, le transformé de V^{n+2} dans le sens des u appartient à la même droite. Il en résulte que U^{n+3} est le transformé de V^{n+2} dans le sens des u et V^{n+3} celui de U^{n+2} dans le sens des v. De plus, les courbes u, v sont les asymptotiques de la surface (y).

Le point U^{n+2} représente la droite yy_v et le point V^{n+2} la droite yy_u.

3. A la quadrique Φ_n sont attachés les plans $U^nU^{n+1}U^{n+2}$ et $V^nV^{n+1}V^{n+2}$, c'est-à-dire les matrices

$$| U^nU^{n+1}U^{n+2} |, \quad | V^nV^{n+1}V^{n+2} |.$$

Lorsque u varie, les courbes caractéristiques de Φ_n sont situées sur les quadriques représentées par les matrices

$$| U^nU^{n+1}U^{n+2} |_u, \quad | V^nV^{n+1}V^{n+2} |_v,$$

c'est-à-dire sur les quadriques représentées par

$$| U^{n-1}U^{n+1}U^{n+2} |, \quad | V^nV^{n+1}V^{n+3} |.$$

La droite V^nV^{n+1} coupe Q en deux points C_n, C'_n qui représentent deux droites c_n, c'_n qui appartiennent à la quadrique Φ_n. La droite $U^{n+1}U^{n+2}$ est tangente à Q au point U^{n+2} et représente la droite yy_v qui appartient aussi à Φ_n. Les courbes caractéristiques de Φ_n, quand u varie, sont donc les droites c_n, c'_n, yy_v.

Si nous désignons par D_n, D'_n les points d'intersection de la droite V^nV^{n+1} avec Q et par d_n, d'_n les droites qu'ils représentent, les lignes caractéristiques de la quadrique Φ'_n lorsque v varie sont les droites d_n, d'_n, yy_u.

Lorsque u, v varient, les points caractéristiques de la quadrique Φ_n sont les quatre points d'intersection des droites c_n, c_n, d_n, d'_n et le point y qui compte pour quatre.

La quadrique Φ_n a donc un contact du troisième ordre avec la surface (y), c'est la quadrique de Lie relative à la surface (y).

Liège, le 20 août 1974.