Bulletin de la Classe des sciences

Involutions cubiques rationnelles appartenant à une surface dont la courbe canonique est d'ordre zéro

Lucien Godeaux

Résumé

Étude des involutions rationnelles n'ayant qu'un nombre fini de points unis (de première espèce) appartenant à une surface dont la courbe canonique est d'ordre zéro ($p_a = P_4 = 1$) et dont tous les genres sont donc égaux à l'unité.

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1974.60848

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Involutions cubiques rationnelles appartenant à une surface dont la courbe canonique est d'ordre zéro

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Étude des involutions rationnelles n'ayant qu'un nombre fini de points unis (de première espèce) appartenant à une surface dont la courbe canonique est d'ordre zéro ($p_a = P_4 = 1$) et dont tous les genres sont donc égaux à l'unité.

Nous avons étudié jadis les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface dont la courbe canonique est d'ordre zéro ($p_a = P_4 = 1$), dans l'hypothèse où la surface image de l'involution possède également une courbe canonique d'ordre zéro (1). Nous avons récemment construit une involution rationnelle n'ayant qu'un nombre fini de points unis (2), précisément trois points unis de première espèce, appartenant à une surface dont la courbe canonique a l'ordre zéro ($p_a = P_4 = 1$) et par conséquent

(1) *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un* (Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 1914, pp. 357-430, 1919, pp. 51-70), *Sur l'ordre des correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1935, pp. 345-353).

(2) *Sur les involutions cycliques d'ordre trois sur une surface dont tous les genres sont égaux à l'unité* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1973, pp. 672-679). Qu'il nous soit permis de rectifier deux lapsus calami que le lecteur aura corrigé lui-même. P. 678, lignes 12 et 13 en remontant, il faut lire les dimensions trois au lieu de quatre. Cela est exigé pour que le système $|G_2|$ soit l'adjoint à $|G_1|$. Page 679, ligne 5, il faut lire de degré virtuel — 3.

dont tous les genres sont égaux à l'unité. L'objet de cette note est l'étude des involutions cycliques du troisième ordre, présentant trois points unis de première espèce, appartenant à une surface dont la courbe canonique est d'ordre zéro.

1. Soit F une surface dont tous les genres sont égaux à l'unité ($p_a = P_4 = 1$) contenant une involution cyclique d'ordre trois présentant trois points unis de première espèce.

Nous pouvons prendre comme modèle projectif de la surface F une surface normale d'un espace S_r à r dimensions, sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie H de période trois, possédant trois axes ponctuels ξ_0, ξ_1, ξ_2 dont le premier seul rencontre la surface F en trois points simples: les points unis de l'involution [1].

La surface F étant normale dans S_r et ayant les genres $p_a = P_4 = 1$, ses sections hyperplanes C ont le genre r et son ordre est égal à $2r - 2$. Le système $| C_0 |$, découpé par les hyperplans passant par ξ_1 et ξ_2, a le degré multiple de 3 et par conséquent nous devons poser $r = 3\rho + 1$.

Nous désignerons par C_1 les courbes découpées par les hyperplans passant par les espaces ξ_0 et ξ_2, par C_2 celles qui sont découpées par les hyperplans passant par ξ_0 et ξ_1. Les dimensions des systèmes $| C_0 |$, $| C_1 |$, $| C_2 |$ seront désignées par $r_0, r_1,$ et r_2.

Dénotons par O_1, O_2, O_3 les points unis de l'involution I déterminée par H sur la surface F. Ces points étant unis de première espèce, dans le plan tangent en O_i à F, l'homographie H détermine une homologie de centre O_i. Ce plan doit donc rencontrer suivant une droite l'un des espaces ξ_1, ξ_2.

2. Rapportons projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace à r_0 dimensions. Il correspond à la surface F une surface Φ, normale, image de l'involution I. Comme F est d'ordre 6ρ, la surface Φ est d'ordre 2ρ.

Nous désignerons par O'_1, O'_2, O'_3 les points de Φ qui correspondent respectivement aux points O_1, O_2, O_3.

[1] Voir notre ouvrage *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Cremonese, 1963).

Entre le genre arithmétique $p_a = 1$ de F et celui p'_a de Φ, nous avons établi la relation ([1])

$$12(p_a + 1) = 3 \cdot 12(p'_a + 1) - 3 \cdot 4,$$

d'où $p'_a = 0$.

Nous avons établi que les courbes C_1 et C_2 passent une ou deux fois par les points unis et, d'une manière précise, que si les courbes C_1 passent une fois par ces points, les courbes C_2 y passent deux fois, et inversement ([2]).

Supposons que les plans tangents à F en O_1, O_2 rencontrent ξ_1 chacun suivant une droite, tandis que le plan tangent en O_3 rencontre suivant une droite l'espace ξ_2. Les courbes C_1 ont des points doubles en O_1, O_2 et un point simple en O_3. L'involution déterminée par H sur une de ces courbes présente cinq points unis et sont d'autre part de genre $3\rho - 1$. Si à cette courbe correspond sur Φ une courbe de genre x, la formule de Zeuthen nous donne

$$6(x - 1) + 2 \,.\, 5 = 2(3\rho - 2),$$

équation impossible en nombres entiers.

Il faut donc que les plans tangents à F aux trois points O_1, O_2, O_3 rencontrent suivant une droite l'un des espaces ξ_1, ξ_2 par exemple ξ_1.

Nous désignerons par $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ les courbes qui correspondent respectivement sur Φ aux courbes C_0, C_1, C_2, les premières étant les sections hyperplanes de Φ.

Les courbes C_0 ont le degré 6ρ et le genre $3\rho + 1$, donc la surface Φ est d'ordre 2ρ et ses sections hyperplanes ont le genre $\rho + 1$.

Les courbes C_1 ont le degré effectif $6\rho - 3$ et le genre $3\rho + 1$, donc le système $| \Gamma_1 |$ a le degré $2\rho - 1$ et le genre ρ.

Les courbes C_2 ont le degré effectif $6\rho - 12$ et le genre $3\rho - 2$, donc le système $| \Gamma_2 |$ a le degré $2\rho - 4$ et le genre $\rho - 2$.

Les courbes Γ_1, Γ_2 rencontrent les courbes Γ_0 en 2ρ points.

Les points O'_1, O'_2, O'_3 sont triples pour la surface Φ et équivalent chacun à une courbe rationnelle de degré virtuel -3. Nous désignerons

---

([1]) *Théorie des involutions cycliques...* (loc. cit.).

([2]) *Sur les points unis parfaits des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège, 1937, pp. 37-40).

respectivement ces courbes par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Nous avons les relations [1].

$$3\Gamma_0 \equiv 3\Gamma_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \qquad (1)$$

$$3\Gamma_0 \equiv 3\Gamma_2 + 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3). \qquad (2)$$

3. Les systèmes $| C_0 |, | C_1 |, | C_2 |$ ont respectivement les dimensions r_0, r_1, r_2. D'autre part les systèmes $| \Gamma_0 |, | \Gamma_1 |, | \Gamma_2 |$ sont complets et si l'on applique le théorème de Riemann-Roch, on a

$$r_0 \geqslant \rho, \ r_1 \geqslant \rho, \ r_2 \geqslant \rho - 1.$$

Mais d'après la théorie des homographies, on doit avoir

$$r_0 + r_1 + r_2 = r + 1,$$

donc on a

$$r_0 = \rho, \ r_1 = \rho, \ r_2 = \rho - 1.$$

Observons que la surface Φ ayant le genre arithmétique $p'_a = 0$, pour qu'elle soit rationnelle il faut encore prouver que son bigenre P_2 est nul. Si la surface Φ possédait une courbe bicanonique. celle-ci serait d'ordre zéro, puisque celle de F est d'ordre zéro. Le système canonique d'une courbe Γ_0 est d'ordre 2ρ et de dimension ρ; c'est précisément le système découpé sur cette courbe par les courbes Γ_1. Le système $| \Gamma_1 |$ cst donc l'adjoint au système $| \Gamma_0 |$.

$$| \Gamma'_0 | = | \Gamma_1 |.$$

Si Φ possédait une courbe bicanonique, $| \Gamma_0 |$ devrait être son biadjoint, c'est-à-dire que $| \Gamma_0 |$ devrait être l'adjoint à $| \Gamma_1 |$. Or, il n'en est rien, les courbes Γ_0 découpant sur une courbe Γ_1 une série non spéciale. On a donc $P_2 = 0$ et la surface Φ est rationnelle.

Observons que les courbes Γ_2 rencontrent les courbes Γ_1 en $2\rho - 2$ points. La série canonique de Γ_1 est d'ordre $2\rho - 2$ et de dimension $\rho - 1$, ce qui est précisément la dimension de $| \Gamma_2 |$. Donc le système $| \Gamma_2 |$ est l'adjoint au système $| \Gamma_1 |$.

$$| \Gamma'_1 | = | \Gamma_2 |.$$

Mais $| \Gamma_1 |$ n'est évidemment pas l'adjoint à $| \Gamma_2 |$.

(1) *Théorie des involutions cycliques*... (loc. cit.).

4. On sait quelle est l'interprétation projective des relations (1) et (2).

Il existe une hypersurface cubique ayant un contact d'ordre deux avec la surface Φ le long d'une courbe Γ_1.

Il existe une hypersurface cubique ayant un contact d'ordre deux avec la surface Φ le long d'une courbe Γ_2.

Des relations (1) et (2), on déduit

$$2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \equiv 6\Gamma_0 - 6\Gamma_1 \equiv 3\Gamma_0 - 3\Gamma_2,$$

c'est-à-dire

$$3\Gamma_0 + 3\Gamma_2 \equiv 6\Gamma_1,$$

La division sur une surface rationnelle étant univoque, on en déduit

$$\Gamma_0 + \Gamma_2 \equiv 2\Gamma_1.$$

Cette relation peut s'établir par une autre voie.

5. Rapportons projectivement les courbes Γ_1 aux hyperplans d'un espace S'_p à ρ dimensions. Il correspond à la surface Φ une surface Φ_1 d'ordre $2\rho - 1$, dont les sections hyperplanes ont le genre ρ. Aux courbes Γ_0 correspondent sur Φ_1 des courbes que nous désignerons toujours par Γ_0 dont le système canonique est découpé par les hyperplans de S'_p. Par une telle courbe passent des hyperquadriques.

Une hyperquadrique passant par une courbe Γ_0 rencontre encore la surface Φ_1 suivant une courbe Γ d'ordre $2\rho - 2$. Inversement, une hyperquadrique passant par la courbe Γ rencontre encore Φ_1 suivant une courbe Γ_0. On a

$$\Gamma \equiv 2\Gamma_1 - \Gamma_0.$$

Les courbes Γ_0 rencontrent la courbe Γ en 2ρ points. Le genre de la section de Φ_1 par une hyperquadrique est égal à $4\rho - 2$. Si nous désignons par x le genre d'une courbe Γ, le genre de la courbe $\Gamma_0 + \Gamma$ est égal à $3\rho + x$, nombre qui doit être égal à $4\rho - 2$. On en déduit $x = \rho - 2$. Les courbes Γ ont donc le genre $\rho - 2$.

Sur la surface Φ, les courbes Γ_1 passent simplement par les points O'_1, O'_2, O'_3 et à ces points correspondent sur la surface Φ_1 des droites que nous désignerons par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Les courbes Γ rencontrent ces droites en deux points.

Sur la surface Φ_1, aux courbes Γ_2 correspondent des courbes que nous désignerons toujours par Γ_2 et qui rencontrent les courbes Γ en $2\rho - 4$ points. Les courbes Γ_2 découpent sur une courbe Γ une série d'ordre $2\rho - 4$ certainement non spéciale et par suite de dimension $\rho - 2$. Or, le système $| \Gamma_2 |$ a la dimension $\rho - 1$ et il existe donc une courbe Γ_2 qui contient une courbe Γ et précisément coïncide avec cette courbe puisqu'elles ont le même ordre.

Les courbes Γ et Γ_2 coïncident donc et on a sur Φ_1 la relation

$$2\Gamma_1 \equiv \Gamma_0 + \Gamma_2,$$

qui est également valable sur la surface Φ.

6. Les hyperquadriques linéairement indépendantes de l'espace S'_p sont au nombre de $(\rho + 1)(\rho + 2) : 2$. Celles qui contiennent une courbe Γ_0 sont au nombre de $(\rho - 1)(\rho - 2) : 2$. Comme la dimension du système $| \Gamma_2 |$ est égale à $\rho - 1$, il existe $(\rho^2 - 5\rho + 2) : 2$ hyperquadriques linéairement indépendantes passant par la surface Φ_1, pour $\rho \geqslant 5$.

Liège, le 22 décembre 1973.