EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, Nos 6-7, 1936.

Sur la construction d'une surface canonique,

par LUCIEN GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

Nous nous proposons, dans cette courbe note, d'indiquer la construction d'une surface canonique, c'est-à-dire d'une surface dont le système des sections hyperplanes est le système canonique.

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions sur laquelle un système linéaire de surfaces est son propre adjoint; il en est alors de même de tout système linéaire de surface tracé sur V. Supposons, en outre, que l'irrégularité superficielle de V soit nulle et que cette variété possède une involution I_2 d'ordre deux privée de points unis. Nous avons demontré (1) que sur une variété Ω image de l'involution I_2, tout système linéaire de surfaces est son propre adjoint. Par conséquent, si l'on construit un modèle projectif normal de Ω, les sections hyperplanes de cette variété seront des surfaces canoniques. L'application de cette remarque va nous conduire à une surface canonique.

2. La surface intersection complète de quatre hyperquadriques linéairement indépendantes d'un espace S_6 est une surface canonique (2). Par conséquent, la variété V, intersection de quatre hyperquadriques de l'espace S_7, a comme sections hyperplanes F des surfaces canoniques; le système $|F|$ est donc son propre adjoint.

Considérons, d'autre part, dans l'espace S_7, l'homographie harmonique

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 : x'_6 : x'_7 = x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : -x_4 : -x_5 : -x_6 : -x_7.$$

(1) Une observation sur les variétés à trois dimensions dont les surfaces canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro. (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1935, pp. 322-325.) Pour les propriétés des involutions que nous utilisons dans le cours de cette note, nous renvoyons à nos exposés : *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935). *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (Paris, Hermann, 1934).

(2) ENRIQUES et CAMPEDELLI, *Lecioni sulla teoria delle superficie algebriche* (Padoue, 1932).

La variété V la plus générale, invariante pour cette homographie, a pour équations

$$\varphi_i(x_0, x_1, x_2, x_3) + \psi_i(x_4, x_5, x_6, x_7) = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

où les φ et les ψ sont des formes quadratiques. Sur cette variété V, l'homographie détermine une involution I_2, d'ordre deux, privée de points unis.

Pour obtenir un modèle projectif normal Ω de la variété image de cette involution, rapportons projectivement les hyperquadriques de S_7 invariantes pour l'homographie et ne contenant pas les axes ponctuels de celui-ci aux hyperplans d'un espace S_{19}. Il suffit dans ce but de poser

$$\rho X_{ik} = x_i x_k, \quad (i, k = 0, 1, 2, 3 \quad \text{ou} \quad i, k = 4, 5, 6, 7).$$

En éliminant les x entre ces équations, on arrive à un système d'équations obtenues en égalant à zéro tous les sous-mineurs des déterminants

$$\begin{vmatrix} X_{00} & X_{01} & X_{02} & X_{03} \\ X_{01} & X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{02} & X_{12} & X_{22} & X_{23} \\ X_{03} & X_{13} & X_{23} & X_{33} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} X_{44} & X_{45} & X_{46} & X_{47} \\ X_{45} & X_{55} & X_{56} & X_{57} \\ X_{46} & X_{56} & X_{66} & X_{67} \\ X_{47} & X_{57} & X_{67} & X_{77} \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Plaçons-nous dans l'espace S_9 représenté par les équations

$$X_{44} = X_{45} = \cdots = X_{77} = 0.$$

En annulant tous les sous-mineurs du premier des déterminants (1), on obtient une variété V_3^8 représentant les quadriques d'un espace ordinaire. Dans S_{19}, on obtient une variété conique W_{13}, projection de V_3^8 à partir de l'espace S'_9 d'équations

$$X_{00} = X_{01} = \cdots = X_{33} = 0.$$

De même, dans l'espace S'_9, le second des déterminants (1) représente une variété $V_3'^8$ et dans S_{19}, une variété conique W'_{13}, projection de $V_3'^8$ à partir de S_9

Dans l'espace S_7 primitif, l'homographie considérée engendre une involution d'ordre deux dont les couples sont représentés, dans S_{19}, par les points de la variété V_7^{64} intersection des variétés W_{13} et W'_{13}.

Aux quatre équations de la variété V correspondent quatre hyperplans de S_{19}, c'est-à-dire un S_{15}. Par suite, la variété Ω est la section de V_7^{64} par un espace S_{15} Les sections hyperplanes de Ω formant un système qui est son propre adjoint, la section de V_7^{64} par un espace S_{14} est une surface canonique Φ, de genres $p_a = p_g = 15, p^{(1)} = 65$. La surface Φ a d'ailleurs, comme on sait, le diviseur $\sigma = 2$.

Appelons, pour abréger, variété de Véronèse (à trois dimensions) la variété V_3^8 obtenue en rapportant projectivement les quadriques d'un espace ordinaire S_3 aux hyperplans d'un espace linéaire S_9. Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Étant donnés dans un espace S_{19} *deux espaces* S_9, S'_9 *ne se rencontrant pas et dans chacun de ces espaces une variété de Véronèse, projetons la variété de* S_9 *à partir de* S'_9 *et celle de* S'_9 *à partir de* S_9. *La section par un espace* S_{14} *de l'intersection des variétés obtenues est une surface canonique.*

3. Les hyperquadriques du système linéaire

$$\Sigma\lambda_{ik}x_i x_k = 0, \qquad (i = 0, 1, 2, 3;\ k = 4, 5, 6, 7) \qquad (2)$$

sont transformées en elles-mêmes par l'homographie considérée dans l'espace S_7. A ces hyperquadriques correspondent, dans S_{19}, les hyperquadriques

$$\Sigma\lambda_{ik}\lambda_{jl}X_{ij}X_{kl} = 0, \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3;\ k, l = 4, 5, 6, 7).$$

qui touchent la variété V_7^{64} et par suite la variété Ω et la surface Φ en tout point d'intersection.

Observons d'ailleurs qu'en rapportant projectivement les hyperquadriques (2) aux hyperplans d'un espace S_{16}, on obtiendrait un modèle projectif normal de la variété Ω (tracé sur la variété de Segre d'indices 3, 3).

4. On peut appliquer un procédé analogue à la surface F de genres un ($p_a = P_4 = 1$) de S_5, d'équations

$$\varphi_i(x_0, x_1, x_2) + \psi_i(x_3, x_4, x_5) = 0, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

invariante pour l'homographie harmonique

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 = x_0 : x_1 : x_2 : -x_3 : -x_4 : -x_5.$$

Cette homographie détermine sur F une involution d'ordre deux, privée de points unis et, par conséquent, de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$).

En posant

$$\rho X_{ik} = x_i x_k, \qquad (i, k = 0, 1, 2 \quad \text{ou} \quad 3, 4, 5)$$

on obtient les équations

$$\begin{vmatrix} X_{00} & X_{01} & X_{02} \\ X_{01} & X_{11} & X_{12} \\ X_{02} & X_{12} & X_{22} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} X_{33} & X_{34} & X_{35} \\ X_{34} & X_{44} & X_{45} \\ X_{35} & X_{45} & X_{55} \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

où les déterminants sont de caractéristique un. Dans un espace S_{11}, ces équations représentent une variété V_5^{16}, intersection du cône W_8 projetant de l'espace $S_5'(X_{00} = X_{01} = \ldots = X_{22} = 0)$ une surface de Véronèse de l'espace $S_5(X_{33} = X_{34} = \ldots = X_{55} = 0)$ et du cône W_8' projetant de S_5 une surface de Véronèse de S_5'. La section de cette variété V_5^{16} par un espace S_8 est une surface Φ de genres zéro et de bigenre un, image de l'involution considérée sur la surface F.

Les sections hyperplanes de la surface de bigenre un Φ sont des courbes d'ordre 16 et, par conséquent, de genre 9. Il en résulte que la section de la variété V_5^{16} par un espace S_7 est une courbe de genre 9 sur laquelle les hyperplans de S_7 découpent une série (complète) paracanonique.

Aux hyperquadriques

$$\Sigma \lambda_{ik} x_i x_k = 0, \qquad (i = 0, 1, 2;\ k = 3, 4, 5)$$

correspondent, dans l'espace S_{11}, les hyperquadriques

$$\Sigma \lambda_{ik} \lambda_{jl} X_{ij} X_{kl} = 0, \quad (i, j = 0, 1, 2;\ k, l = 3, 4, 5). \tag{4}$$

On sait que celles-ci touchent la surface Φ suivant des courbes de genre 9 découpant, sur les sections hyperplanes de la surface, des groupes canoniques de ces sections. Par conséquent, les équations (3) et (4) représentent, dans l'espace S_8 contenant Φ, une courbe canonique de genre 9.

Liége, le 16 juin 1936.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles.