Académie royale de Belgique

BULLETIN
DE LA
CLASSE
DES SCIENCES

5e Série. — Tome XXVI

Koninklijke Belgische Academie

MEDEDEELINGEN
VAN DE
KLASSE DER
WETENSCHAPPEN

5de Reeks. — Boek XXVI

1940

EXTRAIT — UITTREKSEL

Sur les points unis des involutions cycliques d'ordre p^2 appartenant à une surface algébrique,

par Lucien Godeaux, Membre de l'Académie.

(Seconde note)

BRUXELLES
PALAIS DES ACADÉMIES
Rue Ducale, 1
1940

BRUSSEL
PALEIS DER ACADEMIËN
Hertogelijkestraat, 1
1940

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les points unis des involutions cycliques d'ordre p^2 appartenant à une surface algébrique,

par Lucien GODEAUX, Membre de l'Académie.

(*Seconde note*)

Dans cette seconde note [1], nous considérons le cas où la surface Φ possède, au point de diramation A'', un cône tangent formé de deux cônes rationnels irréductibles; nous établissons le théorème suivant :

Si une involution d'ordre p^2, *où* p *est premier impair, cyclique, appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini points unis, possède un point uni dans le domaine du premier ordre duquel l'involution détermine une involution d'ordre* p, *et si le cône tangent à une surface image de l'involution au point de diramation correspondant est formé de deux cônes irréductibles, ce point est multiple d'ordre* p *pour cette surface et le cône tangent se compose d'un plan et d'un cône rationnel d'ordre* $p-1$ *rencontrant le plan suivant une droite.*

Une remarque sur le cas où la surface Φ possède au point de diramation un cône tangent composé de plus de deux

(1) La première note a paru dans le *Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, janvier 1940, pp. 28-43.

parties nous permet d'affirmer que *si le point de diramation est multiple d'ordre* p *pour la surface image, le cône tangent se compose de deux parties.*

11. Considérons un point uni A de l'involution I_q de la surface F tel qu'au point de diramation correspondent A″ de la surface Φ image de l'involution, le cône tangent soit composé de deux parties irréductibles. Le domaine du premier ordre du point A″ sur la surface Φ sera donc constitué par deux courbes rationnelles γ_{11}, γ_{21}, ayant un point commun. Pour simplifier les notations, nous désignerons ces courbes par γ_1, γ_2 et par ν_1, ν_2 leurs ordres.

Le point A″ est multiple d'ordre $\nu_1+\nu_2$ pour la surface Φ et les courbes Γ'_{11} rencontrent γ_1 en ν_1 points, γ_2 en ν_2 points. Le système $|\Gamma'_{11}|$ est de degré $n-\nu_1-\nu_2$, par conséquent le système $|C'_{11}|$ est de degré effectif $p^2(n-\nu_1-\nu_2)$ et le point A absorbe $p^2(\nu_1+\nu_2)$ intersections de deux courbes C'_{11}.

Les courbes C'_{11} ont en commun deux suites de points infiniment voisins successifs de A. Ces courbes ont la multiplicité p en A; supposons qu'elles aient en commun une suite de h points infiniment voisins successifs de A dont le premier est sur a_1 et dont les multiplicités sont ρ_{11}, ρ_{12}, ..., ρ_{1h} et d'autre part une suite de k points infiniment voisins successifs dont le premier est sur a_p et dont les multiplicités sont ρ_{21}, ρ_{22}, ..., ρ_{2k}. On a

$$p > \rho_{11} \geqslant \rho_{12} \geqslant \cdots \geqslant \rho_{1h} \ , \quad \rho_{1h} = \nu_1 \ ,$$
$$p > \rho_{21} \geqslant \rho_{22} \geqslant \cdots \geqslant \rho_{2k} \ , \quad \rho_{2k} = \nu_2 \ ,$$

Nous avons donc

$$p^2 + \rho_{11}^2 + \cdots + \rho_{1h}^2 + \rho_{21}^2 + \cdots + \rho_{2k}^2 = (\nu_1 + \nu_2)\,p^2 \ . \qquad (1)$$

Exprimons que le nombre de points d'intersection d'une courbe C'_{11} avec une courbe C_{2p} ou une courbe C_{21} absorbés en A est multiple de p^2; nous avons

$$p + \rho_{11} + \cdots + \rho_{1h} = \lambda p^2 \ , \qquad (2)$$
$$p + \rho_{21} + \cdots + \rho_{2k} = \mu p^2 \ , \qquad (3)$$

λ et μ étant des entiers positifs. Multiplions les deux membres de (2) par ν_1, ceux de (3) par ν_2 et soustrayons membre à membre de (1) ; il vient

$$p(p-\nu_1-\nu_2)+\rho_{11}(\rho_{11}-\nu_1)+\dots+\rho_{1h}(\rho_{1h}-\nu_1)+\rho_{21}(\rho_{21}-\nu_2)$$
$$+\dots+\rho_{2k}(\rho_{2k}-\nu_2)=p^2\,[\nu_1(1-\lambda)+\nu_2(1-\mu)].$$

Tous les termes du premier membre sont positifs ou nuls ; il doit en être de même de ceux du second membre et on a donc

$$\lambda=\mu=1\ ,\ p=\nu_1+\nu_2\ ,\ \rho_{11}=\rho_{12}=\dots=\rho_{1h}=\nu_1\ ,$$
$$\rho_{21}=\rho_{22}=\dots\rho_{2k}=\nu_2\ .$$

Les relations (1), (2) et (3) deviennent

$$p^2+h\nu_1^2+k\nu_2^2=p^3\ ,\ p+h\nu_1=p^2\ ,\ p+k\nu_2=p^2\ . \quad (4)$$

12. Considérons les courbes C''_{11}. Elles ont en A la multiplicité $2p$ avec p tangentes variables, les p autres tangentes étant confondues avec a_1 et a_p. Soient ρ'_{11}, ρ'_{12}, ..., ρ'_{1h} les multiplicités des courbes C''_{11} aux points infiniment voisins successifs de A multiples d'ordre ν_1 pour les courbes C'_{11} et ρ'_{21}, ρ'_{22}, ..., ρ'_{2k} les multiplicités des mêmes courbes aux points multiples d'ordre ν_2 pour les courbes C'_{11}. On a

$$p\geqslant\rho'_{11}\geqslant\rho'_{12}\geqslant\dots\geqslant\rho'_{1h}=\nu_1-1\ ,$$
$$p\geqslant\rho'_{21}\geqslant\rho'_{22}\geqslant\dots\geqslant\rho'_{2k}=\nu_2-1\ .$$

Une courbe C'_{11} et une courbe C''_{11} ont p^3 de leurs points d'intersection confondus en A, par suite on a

$$2p^2+\nu_1(\rho'_{11}+\dots+\rho'_{1h})+\nu_2(\rho'_{21}+\dots+\rho'_{2k})=p^3.$$

Les points d'intersection d'une courbe C''_{11} et d'une courbe C_{2p} ou d'une courbe C_{21} absorbés en A sont en nombres multiples de p^2, donc

$$2p+\rho'_{11}+\dots+\rho'_{1h}=\lambda' p^2\ ,\ 2p+\rho'_{21}+\dots+\rho'_{2k}=\mu' p^2\ ,$$

λ' et μ' étant des entiers positifs. La comparaison entre ces trois formules donne

$$\lambda'\nu_1+\mu'\nu_2=p\ ,$$

d'où, puisque $\nu_1+\nu_2=p$, $\lambda'=\mu'=1$.

Posons $\rho'_{11} = \nu_1 + \rho_1 - 1$, $\rho'_{21} = \nu_2 + \rho_2 - 1$, nous avons

$$\rho'_{11} + \rho'_{21} \leqslant p\,, \quad \text{d'où} \quad \rho_1 + \rho_2 \leqslant 2\,.$$

On ne peut avoir $\rho_1 = \rho_2 = 1$, car alors $\rho'_{11} = \nu_1$, $\rho'_{21} = \nu_2$ et les courbes C''_{11} auraient ν_1 tangentes confondues avec a_p et $\nu_2 = p - \nu_1$ tangentes confondues avec a_1, comme les courbes C'_{11}; nous avons vu que cela est impossible (n° 6).

Supposons $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$, d'où

$$\rho'_{11} = \rho'_{12} = \ldots = \rho'_{1h} = \nu_1 - 1\,, \quad \rho'_{21} = \nu_2\,.$$

En tenant compte des relations précédentes et des relations (4), nous avons $h = p$, $\nu_1 = p - 1$, $\nu_2 = 1$, $k = p(p-1)$, $\rho'_{2k} = 0$. L'hypothèse $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$ est équivalente.

On ne peut avoir $\rho_1 = \rho_2 = 0$, car cela conduirait à $h = k = p$, $\nu_1 = \nu_2 = p - 1$, d'où $p = 2$.

Restent les hypothèses équivalentes $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 2$ et $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 0$; nous ne considérerons que la première. Elle donne $h = p$, $\nu_1 = p - 1$, $\nu_2 = 1$, $k = p(p-1)$, $\rho'_{2k} = 0$.

Les deux hypothèses acceptables rentrent dans un même cadre : Les courbes C'_{11} ont en A un point multiple d'ordre p et d'une part, une suite de p points $P_1, P_2, \ldots, P_p$ infiniment voisins successifs multiples d'ordre $p-1$, d'autre part, une suite de $p(p-1)$ points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{p(p-1)}$ points simples infiniment voisins successifs de A. Les courbes C''_{11} ont en A la multiplicité $2p$, la multiplicité $p-2$ aux points $P_1, P_2, \ldots, P_p$, la multiplicité deux en $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$; elles passent simplement par les points $Q_{n+1}, \ldots, Q_{n+m}$. On a

$$2n + m = p\,(p-2)\,.$$

L'hypothèse $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$ correspond à $n = 0$.

13. La suite de points infiniment voisins successifs $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{m+n}$ de A appartenant aux courbes C''_{11} doit se terminer par un point uni parfait de I_q distinct de $Q_{p(p-1)}$; les courbes C''_{11} ont donc en commun un certain nombre de points $R_1, R_2, \ldots, R_\mu$. infiniment voisins successifs de Q_{m+n}, simples pour les courbes, unis pour I_q, le dernier étant uni parfait. De plus, au point double Q_n peut être infiniment voisin un point Q_1' distinct de Q_{n+1}, origine d'une suite de λ points infiniment voisins successifs Q_2', Q_3', ..., Q_λ', communs à toutes les courbes C''_{11}, simples pour ces courbes, unis pour I_q, le dernier étant uni parfait.

Considérons une surface Φ'' dont les sections hyperplanes Γ''_{11} correspondent projectivement aux courbes C''_{11}; aux points infiniment voisins de A, situés sur les p tangentes variables aux courbes C''_{11}, correspondent sur Φ'' les points d'une droite γ_0, car ces points forment des groupes de I_q; aux points infiniment voisins de R_μ correspondent les points d'une droite γ_{21} de Φ'' et aux points infiniment voisins de Q_λ' correspondent les points d'une droite γ'.

L'ensemble des droites γ_0, γ_{21}, γ' est équivalent au domaine du point A''_1 de la surface Φ'; ce point est donc triple pour cette surface et les courbes Γ''_{11} sont donc de genre $\pi - p - 1$.

Les courbes C''_{11} sont d'autre part de genre

$$p^2(\pi-1)+1-\frac{1}{2}p(p^2-p+4)-n\,.$$

La formule de Zeuthen, appliquée à la correspondance entre deux courbes homologues Γ''_{11}, C''_{11}, donne

$$p^2+p+n=0\,,$$

ce qui est impossible. Il en résulte que les points Q_1', ..., Q_λ' ne peuvent exister ($\lambda=0$).

Le domaine du point A''_1 de la surface Φ' est donc équivalent à l'ensemble des deux droites γ_0, γ'_{21} et ce point est double biplanaire pour cette surface. Les courbes Γ''_{11} sont de genre $\pi - p$ et la formule de Zeuthen, appliquée à la correspondance entre une courbe Γ''_{11} et la courbe C''_{11} homologue, donne

$$2n=p^2-2p-1\,.$$

On en déduit $m=1$.

Le système $|\Gamma''_{11}|$ a le degré $n-(p+2)$, par conséquent, deux courbes C''_{11} ont $p^2(p+2)$ de leurs points d'intersection absorbés en A. On a donc

$$4p^2 + p(p-2)^2 + 2(p^2-2p-1) + 1 + \mu = p^2(p+2),$$

d'où $\mu = 1$.

Ainsi donc, les courbes C''_{11} ont en commun dans le domaine du point A, outre les p points $P_1, P_2, \ldots, P_p$ multiples d'ordre $p-2$, les $\frac{1}{2}(p^2-2p-1)=n$ points doubles $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, le point simple Q_{n+1} et un point simple R_1, distinct de Q_{n+2}, infiniment voisin de Q_{n+1}, uni parfait pour I_q.

14. La singularité de la surface Φ en A'' est donc un point multiple d'ordre p en lequel le cône tangent est formé d'un cône d'ordre $p-1$ et d'un plan se rencontrant suivant une droite. À ce point fait suite un point double biplanaire. À ce dernier point font suite un certain nombre $k-1$ de points doubles biplanaires infiniment voisins successifs; le dernier de ces points est biplanaire ordinaire ou est suivi d'un point double conique.

Avant d'examiner ces deux hypothèses, observons que l'on a

$$\Gamma_{11} \equiv \Gamma'_{11} + \gamma_1 + \gamma_0 + \varphi + \gamma_{21} + \gamma_2,$$
$$\Gamma_{11} \equiv \Gamma''_{11} + \gamma_1 + 2(\gamma_0 + \varphi + \gamma_{21}) + \gamma_2,$$

où φ est une courbe rationnelle de degré -1 si $k=1$, de degré -2 si $k > 1$.

Les droites γ_0, γ_{21}, composantes d'un point double biplanaire se rencontrent en un point si $k=1$; elles rencontrent chacune en un point la courbe φ si $k > 1$.

Les droites γ_2 et γ_{21}, se rencontrent en un point; la courbe γ_1 et la droite γ_0 se rencontrent également en un point.

En considérant les intersections des courbes précédentes avec γ_1 et γ_2, on trouve que γ_1 est de degré $-p$ et γ_2 de degré -2. Les droites γ_0, γ_{21} sont d'autre part de degré -2.

Supposons en premier lieu que la suite de points doubles successifs envisagée se termine par un point double conique. On sait que dans ce cas, la courbe φ équivaut à la somme de $2k-1$ courbes rationnelles de degré -2,

$$\gamma_{12}, \gamma_{13}, \ldots, \gamma_{1k}, \gamma_k, \gamma_{2k}, \ldots, \gamma_{22},$$

chaque courbe rencontrant la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontrant pas les autres. De plus, γ_{12} coupe γ_0 en un point et γ_{22} coupe γ_{21} en un point. Aucune des courbes de la suite ne rencontre γ_1 ou γ_2.

Rappelons que les courbes Γ_{2p} coupent γ_1 en un point. À une courbe C quelconque de F, correspond sur Φ une courbe du système $|p^2\Gamma_{11}|$. Lorsque la courbe C tend vers une courbe C_{2p}, la courbe correspondante sur Φ tend vers la courbe $p^2\Gamma_{2p}$, augmentée de composantes des points de diramation de la surface Φ. On a donc

$$p^2\Gamma_{11} \equiv p^2\Gamma_{2p} + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_0\gamma_0 + \lambda_{12}\gamma_{12} + \ldots + \lambda_{1k}\gamma_{1k} + \lambda_k\gamma_k$$
$$+ \lambda_{2k}\gamma_{2k} + \ldots + \lambda_{22}\gamma_{22} + \lambda_{21}\gamma_{21} + \lambda_2\gamma_2 + \Delta,$$

où les λ sont des entiers et Δ une courbe (composée) provenant des autres points de diramation de la surface Φ.

En considérant les intersections de la courbe du second membre successivement avec chacune des composantes, on a

$$p^2 - p\lambda_1 + \lambda_0 = 0, \ \lambda_1 - 2\lambda_0 + \lambda_{12} = 0, \ldots, \lambda_{1k} - 2\lambda_k + \lambda_{2k} = 0,$$
$$\ldots, \ \lambda_{22} - 2\lambda_{21} + \lambda_2 = 0, \ \lambda_{21} - 2\lambda_2 = 0.$$

On en déduit

$$\lambda_{21} = 2\lambda_2, \ \lambda_{22} = 3\lambda_2, \ldots, \ \lambda_{2k} = (k+1)\lambda_2, \ \lambda_k = (k+2)\lambda_2,$$
$$\lambda_{1k} = (k+3)\lambda_2, \ \ldots, \ \lambda_0 = (2k+2)\lambda_2, \ \lambda_1 = (2k+3)\lambda_2,$$

et par conséquent,

$$p^2 - p(2k+3)\lambda_2 + (2k+2)\lambda_2 = 0.$$

Il en résulte que λ_2 peut prendre les valeurs 1, p ou p^2. On trouve respectivement

$$2k = p - 2, \quad k = -1, \quad 2k + 3 = 0,$$

ce qui est impossible puisque p est impair. L'hypothèse envisagée doit donc être rejetée.

15. Supposons donc que la suite des points doubles qui succèdent à A se termine par un point double biplanaire ordinaire (hypothèse qui comprend, pour $k=1$, le cas où la courbe φ est de degré -1). La courbe φ est équivalente à une suite de $2k-2$ courbes rationnelles de degré -2,

$$\gamma_{12}, \gamma_{13}, \ldots, \gamma_{1k}, \gamma_{2k}, \ldots, \gamma_{23}, \gamma_{22},$$

présentant les mêmes particularités que la suite dont il a été question plus haut.

Actuellement, on a

$$p^2\Gamma_{11} \equiv p^2\Gamma_{2p} + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_0\gamma_0 + \lambda_{12}\gamma_{12} + \ldots + \lambda_{1k}\gamma_{1k} + \lambda_{2k}\gamma_{2k}$$
$$+ \ldots + \lambda_{22}\gamma_{22} + \lambda_{21}\gamma_{21} + \lambda_2\gamma_2 + \Delta .$$

En raisonnant comme plus haut, on trouve

$$p^2 - p\lambda_1 + \lambda_0 = 0\,,\ \lambda_1 - 2\lambda_0 + \lambda_{12} = 0\,,\ \lambda_{22} - 2\lambda_{21} + \lambda_2 = 0,$$
$$\lambda_{21} - 2\lambda_2 = 0$$

et on en déduit

$$\lambda_{21} = 2\lambda_2\,,\ \lambda_{22} = 3\lambda_2\,,\ \ldots,\ \lambda_0 = (2k+1)\lambda_2\,,\ \ \lambda_1 = (2k+2)\lambda_2\,.$$

Par suite, on a

$$p^2 - p\,(2k+2)\lambda_2 + (2k+1)\lambda_2 = 0\,.$$

On peut encore avoir $\lambda_2=1$, p ou p^2 et on trouve respectivement

$$2k = p-1\ ,\quad 2k+1 = 0\,,\quad k+1 = 0\,.$$

Seul, le premier cas est acceptable. On trouve la relation fonctionnelle

$$p^2\Gamma_{11} \equiv p^2\Gamma_{2p} + (p+1)\gamma_1 + p\gamma_0 + (p-1)\gamma_{12}$$
$$+ \ldots + 3\gamma_{22} + 2\gamma_{21} + \gamma_2 + \Delta\,.$$

La surface Φ possède en A″ un point multiple d'ordre p auquel sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(p-1)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire.

16. Les courbes Γ_{21} rencontrent en un point la courbe γ_2 mais ne rencontre pas les autres composantes du point singulier de Φ. Pour trouver la relation fonctionnelle liant les courbes Γ_{11} et Γ_{21}, on peut reprendre le raisonnement précédent. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} p^2\Gamma_{11} \equiv p^2\Gamma_{21} + \gamma_1 + p\gamma_0 + (2p-1)\gamma_{12} \\ + \dots + \frac{1}{2}(p^2-2p+3)\gamma_{1k} + \frac{1}{2}(p^2+2p-1)\gamma_{2k} \\ + \dots + (p^2-3p+3)\gamma_{22} + (p^2-2p+2)\gamma_{21} + (p^2-p+1)\gamma_2 + \Delta', \end{aligned}$$

Δ' provenant des autres points de diramation de la surface Φ.

17. Nous avons vu que les courbes C_{1p} ont en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables. À ces courbes correspondent sur Ψ_1 les courbes K_{1p} ayant en A′ un point multiple d'ordre p à tangentes variables. Les courbes Γ_{1p} qui leur correspondent sur la surface Φ passent simplement par le point A″ en y rencontrant la droite γ_0 en un point variable; elles ne rencontrent pas les autres composantes du point A″.

À une courbe K_1, section hyperplane de la surface Ψ_1 correspond sur la surface Φ une courbe du système $|p\Gamma_{11}|$ Lorsque la courbe K_1 tend vers une courbe K_{1p}, la courbe correspondante sur la surface Φ tend vers une courbe $p\Gamma_{1p}$ augmentée de composantes des points de diramation de la surface Φ. On a donc une relation de la forme

$$\begin{aligned} p\Gamma_{11} \equiv p\Gamma_{1p} + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_0\gamma_0 + \lambda_{12}\gamma_{12} \\ + \dots + \lambda_{22}\gamma_{22} + \lambda_{21}\gamma_{21} + \lambda_2\gamma_2 + \Delta''. \end{aligned}$$

Δ'' provenant des points de diramation de Φ distincts de A″.

En considérant les intersections de la courbe avec les composantes de A″, on a

$$\begin{aligned} -p\lambda_1 + \lambda_0 = 0,\ p + \lambda_1 - 2\lambda_0 + \lambda_{12} = 0,\ \lambda_0 - 2\lambda_{12} + \lambda_{13} = 0, \\ \dots,\ \lambda_{22} - 2\lambda_{21} + \lambda_2 = 0,\quad \lambda_{21} - 2\lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\lambda_0 = p\lambda_1\,,\ \lambda_{21} = 2\lambda_2\,,\ \lambda_{22} = 3\lambda_{21}\,,\ \ldots\,,\ \lambda_{12} = 2k\lambda_2\,,$$
$$\lambda_0 = (2k+1)\lambda_2 = p\lambda_2\,,$$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2$ et, en considérant la seconde des relations précédentes, $\lambda_1 = 1$.

La relation fonctionnelle entre les courbes Γ_{11} et Γ_{1p} s'écrit donc

$$p\Gamma_{11} \equiv p\Gamma_{1p} + \gamma_1 + p\gamma_0 + (p-1)\gamma_{12} + (p-2)\gamma_{13}$$
$$+ \ldots + 3\gamma_{22} + 2\gamma_{21} + \gamma_2 + \Delta''\,.$$

18. Retournons au cas général, où le cône tangent en A'' à la surface Φ se compose de $m+n$ cônes équivalents à des courbes rationnelles γ_{11}, ..., γ_{1m}, γ_{21}, ..., γ_{2m}. Le point A'' est alors multiple d'ordre

$$\nu = \nu_{11} + \nu_{12} + \ldots + \nu_{1m} + \nu_{21} + \nu_{22} + \ldots + \nu_{2n}$$

pour la surface Φ (ν n'ayant plus la même signification qu'au n° 8).

Les courbes C'_{11} ont en commun des points infiniment voisins de A, multiples d'ordre p pour ces courbes. Désignons par ρ_{11}, ρ_{12}, ..., ρ_{1h} la multiplicité de ceux de ces points qui appartiennent aux courbes C_{2p}; par ρ_{21}, ρ_{22}, ..., ρ_{2k} la multiplicité des points appartenant aux courbes C_{21}; par ρ_1', ρ_2', ..., la multiplicité des points n'appartenant pas aux courbes C_{2p}, C_{21}.

En considérant l'intersection d'une courbe C'_{11} avec une courbe C_{2p}, ou une courbe C_{21}, ou une courbe C'_{11} distincte de la première, on a

$$p + \rho_{11} + \rho_{12} + \ldots + \rho_{1h} = \lambda p^2\,, \tag{1}$$
$$p + \rho_{21} + \rho_{22} + \ldots + \rho_{2k} = \mu p^2\,, \tag{2}$$
$$p^2 + \Sigma\rho_{11}^2 + \Sigma\rho_{21}^2 + \Sigma\rho_1'^2 = p^2\nu\,. \tag{3}$$

Le genre d'une courbe C'_{11} est égal à

$$p^2(\pi-1)+1-\frac{1}{2}p(p-1)-\frac{1}{2}\Sigma\rho_{11}(\rho_{11}-1)$$
$$-\frac{1}{2}\Sigma\rho_{21}(\rho_{21}-1)-\frac{1}{2}\Sigma\rho'_1(\rho'_1-1)\,,$$

et celui d'une courbe Γ'_{11} à $\pi-\nu+1$.

La correspondance 1, p^2 entre une courbe Γ'_{11} et la courbe C'_{11} homologue possède ν points de diramation. En appliquant la formule de Zeuthen à cette correspondance, on obtient la relation

$$p(p-1)+\Sigma\rho_{11}(\rho_{11}-1)+\Sigma\rho_{21}(\rho_{21}-1)+\Sigma\rho'_1(\rho'_1-1)$$
$$=\nu(p^2+1)-2p^2\,.$$

En tenant compte de la relation (3), on en déduit

$$\Sigma\rho_{11}+\Sigma\rho_{21}+\Sigma\rho'_1=2p^2-p-\nu\,.$$

En tenant compte enfin des relations (1) et (2), on a

$$\Sigma\rho'_1+\nu=p^2(2-\lambda-\mu)+p\,.$$

Le premier membre étant positif, il doit en être de même du second et on a $\lambda=\mu=1$. Par suite

$$\Sigma\rho'_1+\nu=p\,.$$

La somme des multiplicités des points du domaine de A, appartenant aux courbes C'_{11} mais non aux courbes C_{2p}, C_{21}, est donc égale à p, diminué de la multiplicité du point A″ pour la surface Φ.

On en conclut que si le cône tangent à la surface Φ en A″ se scinde en plus de deux parties, la multiplicité de ce point pour la surface est inférieure à p. Par conséquent, si le point A″ est multiple d'ordre p pour la surface Φ, on se trouve nécessairement dans le cas étudié au début de cette seconde note.

Liége, le 22 janvier 1940.

G. THONE, Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres
et des Beaux-Arts de Belgique.