Sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une surface algébrique,

par Lucien GODEAUX,
Correspondant de l'Académie.

Dans un travail antérieur [1], nous avons étudié les involutions cycliques du troisième ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique; nous avons construit des surfaces images de ces involutions et déterminé les relations fonctionnelles entre les différents systèmes de courbes de la surface image provenant d'un même système linéaire de la surface support d'une involution. Dans ce nouveau travail, nous nous proposons d'étudier les systèmes canoniques et pluricanoniques des surfaces en question.

Considérons une surface algébrique contenant une involution cyclique du troisième ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, possédant un système canonique simple au moins triplement infini. Ce système contient deux ou trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution; l'un de ces systèmes a pour homologue, sur une surface image de l'involution, le système canonique de cette surface. C'est la

---

(1) Recherches sur les involutions cubiques appartenant à une surface algébrique (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1921, pp. 105-124). Voir aussi Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique (*Bull. de la Soc. Mathém. de France*, 1919, pp. 1-16), Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1930, pp. 450-467; 1931, pp. 1131-1150, 1356-1364; 1935, pp. 338-344). Nous avons résumé nos recherches sur la théorie des involutions dans un exposé paru dans la collection des *Actualités scientifiques :* Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Exposés de Géométrie* publiés sous la direction de M. E. Cartan. Paris, Hermann, 1935, 43 p.).

formation de ce système canonique et de ses multiples que nous étudions. Nous donnons également des exemples des surfaces rencontrées.

1. Soit F une surface algébrique de genre géométrique p_g au moins égal à quatre, dont le système canonique $|C|$ est simple, possédant une involution cyclique I_3, d'ordre trois, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Ceux-ci peuvent être de deux espèces :

1° Les points unis parfaits. Tout point de F situé dans le domaine du premier ordre d'un point uni parfait est uni pour l'involution ;

2° Les points unis non parfaits. Dans le domaine du premier ordre d'un tel point sur la surface F, il existe deux points unis pour I_3.

Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace S à $p_g - 1$ dimensions. A la surface F correspond dans cet espace une surface simple, modèle canonique de F, que nous désignerons encore par F. La transformation birationnelle de F en elle-même, génératrice de l'involution I_3, est une homographie H de l'espace S, de période trois, possédant deux ou trois axes ponctuels.

Désignons par Φ une surface image de l'involution I_3 et par $|\Gamma|$ le système canonique de cette surface. Nous avons établi qu'aux courbes Γ correspondent sur la surface F des courbes C passant simplement par les points unis parfaits de I_3, mais ne passant pas par les points unis non parfaits.

2. Supposons en premier lieu que l'homographie H possède trois axes ponctuels (espaces linéaires lieux de points unis) σ_0, σ_1, σ_2. Nous désignerons par Σ_0, Σ_1, Σ_2 les systèmes d'hyperplans de S passant respectivement par les axes σ_1 et σ_2, σ_2 et σ_0, σ_0 et σ_1. Les hyperplans de Σ_0, Σ_1, Σ_2 découpent sur F des systèmes linéaires de courbes canoniques, respectivement $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$, composés au moyen de l'involution I_3.

L'un de ces systèmes, $|C_0|$, est le transformé du système canonique $|\Gamma|$ de Φ.

Soit A un point uni parfait de I_3. Les courbes C_0 doivent passer simplement par ce point et par conséquent celui-ci appartient à un des axes σ_1, σ_2. Le plan tangent α à F en A est uni pour l'homographie H et dans ce plan, cette homographie détermine une homologie de centre A. L'axe de cette homologie ne peut appartenir à σ_1 ou à σ_2, puisque les hyperplans de Σ_0 ne peuvent contenir le plan α. Il en résulte que le plan α rencontre σ_0 suivant une droite, axe de l'homologie déterminée dans ce plan par H.

Soit maintenant B un point uni non parfait de I_3. Comme il ne peut appartenir aux courbes C_0, il est situé dans l'espace σ_0. Dans le plan tangent β à F en B, H détermine une homographie non homologique; par suite β s'appuie en un point sur σ_1 et en un point sur σ_2.

Nous supposerons que l'involution I_3 possède τ_1 points unis parfaits appartenant à σ_1, τ_2 points unis parfaits appartenant à σ_2 et τ_0 points unis non parfaits appartenant à σ_0.

Les courbes C_0 passent par les $\tau_1 + \tau_2$ points unis parfaits; les courbes C_1 passent par les τ_2 points unis parfaits appartenant à σ_2 et par les τ_0 points unis non parfaits; en ces derniers points, elles ont des tangentes fixes (s'appuyant sur σ_2). Enfin, les courbes C_2 passent par les τ_1 points unis parfaits appartenant à σ_1 et les τ_0 points unis non parfaits en ayant, en chacun de ces derniers points, une tangente fixe s'appuyant sur σ_1.

3. Aux systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets $|\Gamma|$, $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$; le premier est le système canonique de la surface. Si nous désignons par $p^{(1)}$ le genre linéaire de la surface F, le genre linéaire $\pi^{(1)}$ de Φ est donné par la relation

$$p^{(1)} - 1 = 3(\pi^{(1)} - 1) + \tau_1 + \tau_2.$$

A un point uni parfait de I_3 correspond sur Φ un point triple équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré — 3. A un point uni non parfait correspond sur Φ un point double biplanaire ordinaire équivalent à deux courbes rationnelles de degré — 2 se coupant en un point.

Désignons par $A_{1i} (i = 1, 2, \ldots, \tau_1)$ les points unis parfaits appartenant à σ_1; par a_{1i} les courbes correspondantes sur Φ; par $A_{2i} (i = 1, 2, \ldots, \tau_2)$ les points unis parfaits appartenant à σ_2; par a_{2i} les courbes correspondantes sur Φ; par $B_i (i = 1, 2, \ldots, \tau_0)$ les points unis non parfaits (appartenant à σ_0); par b_{i1}, b_{i2} les courbes correspondantes sur Φ. Les courbes Γ rencontrent chacune des courbes a_{1i}, a_{2i} en un point.

Les courbes C_1 passent par les τ_2 points unis parfaits appartenant à σ_2; comme les hyperplans de Σ_1 contiennent σ_2 et σ_0, ils contiennent les plans tangents à F aux points considérés et ceux-ci sont doubles pour les courbes C_1.

Le système $|C_1|$ a donc le degré effectif $p^{(1)} - 1 - 4\tau_2 - 2\tau_0$ et le genre $p^{(1)} - \tau_2$.

Le système $|\Gamma_1|$ a donc le degré $\frac{1}{3}(p^{(1)} - 1 - 4\tau_2 - 2\tau_0)$ et le genre $\frac{1}{3}(p^{(1)} - 1 - \tau_0) - \tau_2$. Les courbes Γ_1 ne rencontrent pas les courbes a_{1i}; elles rencontrent les courbes a_{2i} chacune en deux points, chacune des courbes b_{i1} en un point, mais ne rencontrent pas les courbes b_{i2}. Les courbes Γ_1 rencontrent les courbes Γ en $\frac{1}{3}(p^{(1)} - 1 - 2\tau_2)$ points.

Les courbes C_2 donnent lieu à des conclusions analogues pour les courbes Γ_2.

A une courbe C non transformée en elle-même par H correspond sur Φ une courbe $\overline{\Gamma}$ appartenant à un système linéaire qui comprend les courbes 3Γ, $3\Gamma_1$, $3\Gamma_2$ augmentées des courbes a, b. On trouve précisément les relations fonctionnelles

$$3\Gamma + \Sigma a_{1i} + \Sigma a_{2i} \equiv 3\Gamma_1 + 2\Sigma a_{2i} + 2\Sigma b_{i1} + \Sigma b_{i2}$$
$$\equiv 3\Gamma_2 + 2\Sigma a_{1i} + \Sigma b_{i1} + 2\Sigma b_{i2}.$$

4. Entre les genres arithmétiques p_a de F et π_a de Φ, nous avons la relation

$$3(p_a+1)=9(\pi_a+1)-\tau_1-\tau_2-2\tau_0.$$

On en conclut que $\tau_1+\tau_2+2\tau_0$ est multiple de 3. D'autre part, en exprimant le degré, le genre de $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ en fonction de $\pi^{(1)}$, ainsi que le nombre des points communs aux courbes Γ_1, Γ_2 et Γ, on trouve que $\tau_1-2\tau_0$, $\tau_2-2\tau_0$, $\tau_1+\tau_2-\tau_0$ et $\tau_1-\tau_2$ sont multiples de 3. On en conclut que si τ_0 divisé par 3 donne pour reste ε, τ_1 et τ_2 sont congrus à 2ε par rapport au module 3.

5. Aux courbes bicanoniques de Φ correspondent sur F des courbes bicanoniques 2C ayant des points doubles en A_{1i}, A_{2i}. Parmi ces courbes se trouvent les courbes $2C_0$ et C_1+C_2. Par conséquent, le système bicanonique $|2\Gamma|$ de Φ comprend les courbes

$$\Gamma_1+\Gamma_2+\Sigma b_{i1}+\Sigma b_{i2}.$$

Considérons une courbe canonique C de F et soient C', et C'' les courbes que H et H^2 lui font correspondre. La courbe $C+C'+C''$ appartient à un système linéaire partiel $|D|$, appartenant au système tricanonique $|3C|$, composé au moyen de l'involution I_3. Le système $|D|$ contient les systèmes $|3C_0|$, $|3C_2|$, $|3C_2|$; il n'a, d'autre part, pour points-base aucun des points unis de l'involution I_3. Les courbes tricanoniques de Φ doivent rencontrer chacune des courbes a_{1i}, a_{2i} en trois points; il leur correspond donc, sur F, des courbes D ayant des points triples en A_{1i}, A_{2i}, c'est-à-dire les courbes D passant par ces points. Il en résulte que le système tricanonique $|3\Gamma|$ de Φ ne contient pas les courbes $3\Gamma_1$ et $3\Gamma_2$ (augmentée de composantes a_{1i}, a_{2i}, b_{i1}, b_{i2}).

En rapportant les courbes D aux hyperplans d'un espace linéaire ayant la même dimension que $|D|$, on obtient un modèle projectif normal de Φ. Aux points unis de I_3 correspondent, sur ce modèle projectif, $\tau_1+\tau_2$ points triples, à cônes tangents rationnels et τ_0 points doubles biplanaires ordinaires. Les courbes tricanoniques sont découpées par les hyperplans passant par les $\tau_1 + \tau_2$ points triples.

6. Il est aisé de former des exemples de surfaces F contenant des involutions cycliques d'ordre trois pour lesquelles τ_0, τ_1, τ_2 ne sont pas nuls.

La surface du cinquième ordre, d'équation

$$a_3 x_3^4 x_4 + a_4 x_4^4 x_3 + x_3^2 x_4^2 \alpha_1(x_1, x_2) + x_3 x_4 \alpha_3(x_1, x_2) + \alpha_5(x_1, x_2) = 0,$$

où α_1, α_3, α_5 sont des formes de degrés un, trois, cinq en x_1, x_2, est transformée en elle-même par l'homographie

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^2 x_4,$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. L'involution d'ordre trois, engendrée sur la surface par cette homographie, possède deux points unis parfaits (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) et cinq points unis non parfaits situés sur la droite $x_3 = x_4 = 0$. La surface image de l'involution possède un faisceau de courbes canoniques de genre deux [1].

La surface F, d'ordre huit, d'équation

$$\begin{aligned} a_0 x_3^7 x_4 &+ a_1 x_3^4 x_4^4 + a_2 x_3 x_4^7 + x_3^5 x_4^2 \alpha_1 + x_3^2 x_4^5 \beta_1 + x_3^6 \alpha_2 + x_3^3 x_4^3 \beta_2 \\ &+ x_4^6 \gamma_2 + x_3^4 x_4 \alpha_3 + x_3 x_4^4 \beta_3 + x_3^2 x_4^2 \alpha_4 + x_3^3 \alpha_5 + x_4^3 \beta_5 \\ &+ x_3 x_4 \alpha_6 + \alpha_8 = 0, \end{aligned}$$

où les α, β, γ sont des formes en x_1, x_2 dont les degrés sont indiqués par les indices, est également transformée en elle-même par l'homographie (1). L'involution I_3 d'ordre trois engendrée par cette homographie sur F possède deux points unis parfaits (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) et huit points unis non parfaits situés sur la droite $x_3 = x_4 = 0$; on a $\tau_0 = 8$, $\tau_1 = \tau_2 = 1$. La surface F a les caractères $p_a = p_g = 35$, $p^{(1)} = 129$. La sur-

[1] Sur les involutions appartenant aux surfaces algébriques (*C. R.*, 1916, t. 163, pp. 261-263); Sur certaines involutions appartenant à une surface algébrique (*Anais da Faculdade de Ciências do Porto*, 1935, t. 19, pp. 3-11).

face Φ, image de l'involution I_3, a donc les genres $p_a = p_g = 13$, $p^{(1)} = 42$.

7. Envisageons maintenant le cas où l'homographie H ne possède que deux axes σ_0, σ_1. Au système canonique de Φ correspond sur F le système découpé par les hyperplans passant par l'un des espaces σ_0, σ_1, par exemple par σ_1. Il en résulte que les points unis parfaits de l'involution I_3 appartiennent tous à σ_1. D'autre part, l'involution ne peut posséder de point uni non parfait, car en un tel point, qui appartiendrait à σ_0, le plan tangent à F est uni pour l'homographie H et doit s'appuyer suivant une droite sur σ_1, ce qui est impossible. L'involution I_3 possède donc τ points unis parfaits.

Désignons par $|C_0|$ le système de courbes C découpées sur F par les hyperplans passant par σ_1, par $|C_1|$ celui des courbes C découpées sur F par les hyperplans passant par σ_0. Ces systèmes sont composés au moyen de I_3 et il leur correspond respectivement sur Φ le système canonique $|\Gamma|$ de cette surface et un système complet $|\Gamma_1|$. Soient $A_1, \ldots, A_\tau$ les points unis de I_3, $a_1, a_2, \ldots, a_\tau$ les courbes rationnelles de degré -3 qui leur correspondent sur Φ. On a la relation fonctionnelle

$$3\Gamma + \Sigma a_i \equiv 3\Gamma_1.$$

Si p_a, $p^{(1)}$ sont les genres arithmétique et linéaire de F, π_a, $\pi^{(1)}$ ceux de Φ, on a les relations

$$3(p_a + 1) = 9(\pi_a + 1) \quad \tau,$$
$$p^{(1)} - 1 = 3(\pi^{(1)} - 1) + \tau.$$

On en conclut que τ et $p^{(1)} - 1$ sont multiples de 3. D'ailleurs, le système $|\Gamma_1|$ a le degré $\frac{1}{3}(p^{(1)} - 1)$ et le genre $\frac{1}{3}(p^{(1)} - 1) + 1$.

Dans le système bicanonique $|2C|$ de F, il existe trois systèmes partiels composés au moyen de I_3. L'un comprend les courbes $2C_0$ et a pour homologue sur Φ le système bicanonique $|2\Gamma|$ de cette surface; un second comprend les courbes

$2C_1$ et le troisième les courbes $C_0 + C_1$. Ces deux derniers systèmes ont pour homologues sur Φ les systèmes $|2\Gamma_1|$, $|\Gamma + \Gamma_1|$.

Si l'on considère une courbe C et ses transformées C', C'' par H et H^2, on obtient un système partiel $|C + C' + C''|$ de courbes tricanoniques, composé au moyen de I_3 et comprenant les courbes $3C_0$, $3C_1$. A celles des courbes de ce système qui passent par les points $A_1 . A_2, \ldots, A_\tau$ correspondent sur Φ les courbes tricanoniques 3Γ de cette surface.

8. Considérons dans l'espace S_4 l'homographie de période trois

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_0 : x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon x_4, \qquad (1)$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. Elle possède deux axes ponctuels : un plan σ_1 et une droite σ_0,

$$\sigma_1\,(x_3 = x_4 = 0), \quad \sigma_0\,(x_0 = x_1 = x_2 = 0).$$

La surface F d'ordre neuf, d'équations

$$\varphi_1(x_0, x_1, x_2) + \psi_1(x_3, x_4) = 0, \quad \varphi_2(x_0, x_1, x_2) + \psi_2(x_3, x_4) = 0, \qquad (2)$$

où les φ, ψ sont des formes cubiques, est transformée en elle-même par l'homographie (1). Celle-ci détermine sur F une involution I_3 ayant neuf points unis parfaits

$$x_3 = x_4 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0.$$

La surface F a comme système canonique celui de ses sections hyperplanes. La surface Φ a les genres $p_a = p_g = 2$, $p^{(1)} = 1$. Les courbes canoniques de Φ correspondent aux sections de F par les hyperplans passant par σ_1 ; elles forment un faisceau au moyen duquel sont composés les systèmes pluricanoniques de la surface.

On obtient de la manière suivante un modèle projectif de la surface Φ : Les hypersurfaces cubiques de S_4, transformées en elles-mêmes par l'homographie (1) et ne contenant ni σ_0, ni σ_1, sont en nombre ∞^{13}. Rapportons projectivement ces hypersurfaces aux hyperplans d'un espace linéaire S_{13} en posant

$$\rho X_{ikl} = x_i x_k x_l, \qquad (i, k, l = 0, 1, 2),$$
$$\rho X'_{ikl} = x_i x_k x_l, \qquad (i, k, l = 3, 4).$$

L'élimination des x entre ces équations donne une première série d'équations obtenues en annulant tous les mineurs de la matrice

$$\begin{Vmatrix} X_{000} & X_{110} & X_{220} & X_{012} & X_{002} & X_{001} \\ X_{001} & X_{111} & X_{221} & X_{112} & X_{012} & X_{110} \\ X_{002} & X_{112} & X_{222} & X_{221} & X_{220} & X_{012} \end{Vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

et une seconde série

$$\begin{Vmatrix} X'_{333} & X'_{334} & X'_{344} \\ X'_{334} & X'_{344} & X'_{444} \end{Vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Dans l'espace S_9, représenté par $X'_{ikl} = 0$, les équations (3) représentent une surface V_2^9; dans l'espace S'_3, représenté par $X_{ikl} = 0$, les équations (4) représentent une cubique gauche V_3^1. Dans S_{13}, les équations (3) représentent une variété V_6^9 projection de V_2^9 à partir de S'_3 et les équations (4), la variété V_{11}^3 projetant V_1^3 de S_9. L'intersection de ces deux variétés est une variété V_4^{27} dont les points représentent les ∞^4 groupes de trois points de S_4 transformés en eux-mêmes par l'homographie (1).

Aux équations (2) correspondent dans S_{13} deux hyperplans; l'espace S_{11} qu'ils ont en commun coupe la variété V_4^{27} suivant une surface Φ_0, modèle projectif de Φ.

L'espace S_{11} coupe S_9 suivant un espace S_7 rencontrant Φ_0 en neuf points, triples pour cette surface. Ce sont les neuf points de diramation. Le système tricanonique de Φ_0 est découpé par les hyperplans passant par l'espace S_9. Chaque courbe tricanonique est manifestement formée de trois courbes elliptiques d'un faisceau. Une courbe de ce faisceau est découpée sur Φ_0 par l'espace S_{10} déterminé par S_9 et par un point de V_1^3.

9. Pour terminer, nous montrerons l'existence d'une involution I_3 sur une surface F pour laquelle l'homographie H a trois axes ponctuels, mais qui ne possède que des points unis parfaits.

Considérons dans l'espace S_9 la variété V_3^8 représentée par l'évanouissement de tous les mineurs de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{12} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} & X_{34} \\ X_{14} & X_{24} & X_{34} & X_{44} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Cette variété est transformée en elle-même par l'homographie H

$$\rho X'_{11} = X_{11}, \quad \rho X'_{12} = X_{12}, \quad \rho X'_{22} = X_{22},$$
$$\rho X'_{13} = \varepsilon X_{13}, \quad \rho X'_{14} = \varepsilon X_{14}, \quad \rho X'_{23} = \varepsilon X_{23}, \quad \rho X'_{24} = \varepsilon X_{24},$$
$$\rho X'_{33} = \varepsilon^2 X_{33}, \quad \rho X'_{34} = \varepsilon^2 X_{34}, \quad \rho X'_{44} = \varepsilon^2 X_{44},$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. Représentons par O_{ik} le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_{ik}. L'homographie H possède trois axes ponctuels : $\sigma_0 = O_{13}\, O_{23}\, O_{14}\, O_{24}$, $\sigma_1 = O_{11}\, O_{12}\, O_{22}$, $\sigma_2 = O_{33}\, O_{34}\, O_{42}$.

L'hypersurface

$$\varphi_1 (X_{11}, X_{12}, X_{22}) + \varphi_2 (X_{33}, X_{34}, X_{44}) + \varphi_3 (X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}) + \varphi = 0$$

où φ_1, φ_2, φ_3 sont des formes cubiques et φ une forme cubique dont chaque terme comprend une des variables X_{11}, X_{12}, X_{22}, une des variables X_{33}, X_{34}, X_{44} et une des quatre dernières variables, est transformée en elle-même par H. Elle découpe sur V_3^8 une surface F, d'ordre **24**, sur laquelle H détermine une involution cubique I_3. Cette involution possède douze points unis, à savoir :

1° dans σ_1, les six points

$$X_{11} X_{22} - X_{12}^2 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad X_{13} = \cdots = X_{44} = 0;$$

2° dans σ_2, les six points

$$X_{33} X_{44} - X_{34}^2 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad X_{11} = \cdots = X_{24} = 0.$$

Un calcul simple montre que le plan tangent en un quelconque de ces points s'appuie suivant une droite sur l'axe σ_0

de H. Il en résulte que ces points sont unis parfaits par l'involution I_3.

Le système canonique de la surface F est constitué par les sections hyperplanes. Aux courbes canoniques de la surface Φ, image de I_3, correspondent sur F les courbes découpées par les hyperplans

$$\lambda_{13} X_{13} + \lambda_{14} X_{14} + \lambda_{23} X_{23} + \lambda_{24} X_{24} = 0.$$

Rapportons projectivement ces hyperplans aux plans d'un espace ordinaire; nous obtiendrons ainsi un modèle projectif de la surface Φ sous forme d'une quadrique double canonique de support

$$X_{13} X_{24} - X_{14} X_{23} = 0. \tag{5}$$

La courbe de diramation peut se former de la manière suivante : Dans φ_1 et φ, remplaçons X_{11}, X_{12}, X_{22} respectivement par X_{13}^2, $X_{13}X_{23}$, X_{23}^2; dans φ_2 et φ, X_{33}, X_{34}, X_{44} par X_{23}^2, $X_{23}\,X_{24}$, X_{24}^2. La courbe de diramation est découpée sur la quadrique (1) par la surface du douzième ordre

$$X_{23}^2 (X_{23}^2 \varphi_3 + \varphi)^2 - 4\, \varphi_1 \varphi_2 = 0.$$

La surface F a les genres $p_a = p_g = 10$, $p^{(1)} = 25$ et la surface Φ, les genres $p_a = p_g = 4$, $p^{(1)} = 5$.

Liége, le 13 juin 1936.