Bulletin de la Classe des sciences

Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple (5e note)

Lucien Godeaux

Résumé

On considère une surface Φ image d'une involution cyclique d'ordre premier *p* n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique F. Si 0 est un point uni de seconde espèce et de troisième catégorie, le cône tangent à la surface Φ au point O' homologue de O se scinde en quatre cônes (σ_α), (T_1), (T_2), (σ_β) chacun de ces cônes ayant une génératrice en commun avec le précédent et le suivant, mais non avec les autres. Le point infiniment voisin de O' sur la génératrice commune à (T_1), (T_2) peut être simple, double conique ou double biplanaire. Nous considérons dans cette note le cas où ce point est simple.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple

(cinquième note)

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — On considère une surface Φ image d'une involution cyclique d'ordre premier p n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique F. Si 0 est un point uni de seconde espèce et de troisième catégorie, le cône tangent à la surface Φ au point O' homologue de O se scinde en quatre cônes (σ_α), (τ_1), (τ_2), (σ_β), chacun de ces cônes ayant une génératrice en commun avec le précédent et le suivant, mais non avec les autres. Le point infiniment voisin de O' sur la génératrice commune à (τ_1), (τ_2) peut être simple, double conique ou double biplanaire. Nous conisdérons dans cette note le cas où ce point est simple.

Dans les notes précédentes [1] nous avons construit une surface Φ image d'une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique F, les points de diramation sur cette surface Φ étant isolés. Nous considérons dans cette note un point de diramation O′ de seconde espèce et de troisième catégorie. Si nous projetons la surface Φ de ce point O′ sur un hyperplan de l'espace ambiant (ne passant pas par O′), nous obtenons une surface Φ_1 et sur cette surface il existe quatre courbes rationnelles σ_2, τ_1, τ_2, σ_β.

[1] Les trois premières notes ont paru dans le Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1972, pp. 6-22, 158-170, 171-179. Une quatrième note a paru dans le même recueil, 1972, pp. 1299-1306. Voir aussi notre ouvrage sur la *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Ed. Cremonese, 1963).

Le cône tangent à Φ en O′ est formé des quatre cônes (σ_α), (τ_1), (τ_2), (σ_β) projetant ces courbes de O′.

Nous avons déjà étudié des points de cette nature dans notre troisième note. Nous poursuivons ici cette étude dans le cas où le point commun aux courbes τ_1, τ_2 est simple pour la surface Φ. Nous aurons à rappeler des résultats établis dans notre troisième note, celle-ci sera simplement désignée par III.

Dans une prochaine note, nous étudierons le cas où le point commun aux courbes τ_1, τ_2 est double conique.

Signalons que nous avons déjà étudié un cas particulier d'un point de seconde espèce et de troisième catégorie [1].

1. Nous considérons dans un espace S_r à r dimensions une surface algébrique F transformée en soi par une homographie périodique H, dont la période est un nombre premier $p > 2$, possédant p axes ponctuels dont un seul, σ_0, rencontre F en un nombre fini de points. Nous désignerons par $|C|$ le système des courbes découpées sur F par les hyperplans passant par les axes de l'homographie H sauf par σ_0. Sur F, H détermine une involution cyclique I n'ayant qu'un nombre fini de points unis (sur σ_0), d'ordre p. Le système $|C|$ est composé au moyen de l'involution I et sa dimension, r_0, peut, de même que r, être considérée aussi grande qu'on le veut. En rapportant projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions, il correspond à F une surface Φ image de l'involution I et aux points unis de cette involution correspondent sur Φ des points de diramation isolés, d'ailleurs multiples pour la surface. Si N est l'ordre de la surface Φ, la surface F est d'ordre pN.

Soit O un point uni de seconde espèce et de troisième catégorie et O′ le point qui lui correspond sur Φ. Au point O sont attachés deux entiers α, β compris entre 1 et p. Le nombre $\alpha\beta - 1$ est multiple de p et nous poserons

$$\alpha\beta - 1 = tp.$$

[1] *Un point de diramation d'une surface multiple en lequel le cône tangent se scinde en quatre parties* (Revue Roumaine de Mathématique pure et appliquées, 1972, pp. 1335-1340). Un lapsus, corrigé probablement par le lecteur, s'est glissé dans cette note. La suite des points $(\alpha,1)$, $(\alpha,2)$, ... se termine au point $(\alpha,\beta - 1) = (\alpha,18)$ et non $(\alpha,17)$. De même, la suite $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, ... se termine au point $(\beta, \alpha - 1) = (\beta,17)$ et non au point $(\beta,18)$.

Désignons par C^1 les courbes C passant par le point O. Les courbes C^1 ont en commun outre le point O:

— Une suite de points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \beta - 1)$ infiniment voisins succesifs de O appartenant à une branche linéaire d'oiigine O;

— Une sec nde suite de points $((\alpha,1)$, $(\alpha,2)$, ..., (α,x) $(\alpha,x + 1)$, $(\alpha,x+1,1)$, ..., P, infiniment voisins successifs de O, situés sur une branche superlinéaire d'origine O;

— Une suite de points $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, ..., $(\beta,\alpha - 1)$ infiniment voisins successifs de O, situés sur une branche linéaire d'origine O;

— Une suite de points $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, ..., (β,x'), $(\beta,x' + 1)$, $(\beta,x' + 1,1)$, ..., P', infiniment voisins successifs de O situés sur une branche superlinéaire d'origine O.

Tous ces points sont unis de seconde espèce sauf les points $(\alpha,\beta-1)$, P, P', $(\beta,\alpha-1)$, qui sont unis de première espèce.

Les points $(\alpha,1)$, $(\alpha,2)$, ..., (α,x) sont multiples d'ordre

$$\lambda_1 = a + (H + H')m,$$

le point $(\alpha,x+1)$ d'ordre $a + H'm$, les points $(\alpha,x+2)$, $(\alpha,\beta-1)$ d'ordre a et P d'ordre m pour les courbes C^1.

Les points $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, ..., (β,x') sont multiples d'ordre

$$\mu_1 = b + (K+K')n,$$

le point $(\beta,x'+1)$ d'ordre $b + K'n$, les points $(\beta,x'+2)$, ..., $(\beta,\alpha-1)$ d'ordre b pour les courbes C^1 et le point P' multiple d'ordre n.

Les nombres H et H' d'une part, les nombres K et K' d'autre part sont premiers entre eux.

Le point O étant de troisième catégorie, on a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = h_1 p, \mu_1 + \beta\lambda_1 = h_2 p. \qquad (h_1 > 1, h_2 > 1)$$

2. Soit Φ_1 la surface projection de Φ à partir du point O' sur un hyperplan de l'espace ambiant (ne passant pas par O'). Aux domaines des points unis de première espèce $(\alpha,\beta-1)$, P, P', $(\beta,\alpha-1)$ correspondent sur Φ_1 quatre courbes rationnelles σ_α d'ordre a, τ_1 d'ordre m, τ_2 d'ordre n et σ_β d'ordre b. Chacune de ces courbes rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres. Le point O' est multiple d'ordre $a + m + n + b$ pour la surface Φ.

Ces points rappelés, supposons que le point O_1 commun aux courbes τ_1, τ_2 soit *simple pour la surface* Φ_1.

Projetons Φ_1 de O'_1 sur un hyperplan de l'espace ambiant ne passant pas par O'_1. Il correspond à Φ_1 une surface Φ_2 sur laquelle sont tracées une courbe σ_α d'ordre a, une courbe τ_1 d'ordre $m - 1$, une courbe τ_2 d'ordre $n - 1$, une courbe σ_β d'ordre b et une droite exceptionnelle ρ_1 située dans le plan tangent à Φ_1 en O'_1.

Aux sections hyperplanes Γ^2 de la surface Φ_2 correspondent sur F des courbes C^2 ayant en $(\alpha,\beta-1)$ la multiplicité a, en P la multiplicité $m - 1$, en P' la multiplicité $n - 1$, en $(\beta,\alpha-1)$ la multiplicité b, en un point P_1, uni de première espèce, la multiplicité *un*, la droite ρ_1 correspondant au domaine de P_1.

Il existe donc une branche superlinéaire d'origine O sur les courbes C^2 passant par le point P_1. Cette branche peut contenir le point $(\alpha,1)$ ou le point $(\beta,1)$. Supposons pour fixer les idées qu'elle contient $(\alpha,1)$. Les courbes C^2 ont en commun une suite de points $(\alpha,1)$, ..., (α,x_1), (α,x_1+1), $(\alpha,x_1+1,1)$,..., P_1 infiniment voisins successifs de O.

Supposons en premier lieu $x_1 < x$. Les courbes C^2 passent a fois par $(\alpha,\beta-1)$, ..., $(\alpha,x+2)$, $a+H'(m-1)$ par $(\alpha,x+1)$, $a+(H+H')(m-1)$ par (α,x), ..., (α,x_1+2). D'autre part, elles passent λ_2 fois par $(\alpha,1)$, ..., (α,x_1), y_1 fois par (α,x_1+1). Puisqu'elles passent une seule fois par P_1, on doit avoir

$$\lambda_2 - y_1 = H_1 \quad , \quad y_1 - a - (H+H')(m-1) = H'_1,$$

H_1 et H_1 étant des entiers premiers entre eux. On en déduit

$$\lambda_2 = a + (H+H')(m-1) + H_1 + H'_1,$$

$$y_1 = a + (H+H')(m-1) + H'_1.$$

Les courbes C^2 passent b fois par $(\beta,\alpha-1)$, ..., $(\beta,x'+2)$, $b+K'(n-1)$ fois par $(\beta,x'+1)$, $\mu_2 = b + (K+K')(n-1)$ fois par (β,x'), ..., $(\beta,1)$.

La somme des multiplicités des courbes C^2 aux points O, $(\alpha,1)$, ..., $(\alpha,\beta-1)$ doit être égale à p, ce qui donne

$$(x+1)(H+H')(m-1) + H'(m-1) + (x_1+1)(H'_1+H'_1) + H_1 +$$
$$+ (K + K')(n - 1) + \beta a + b = p.$$

La somme des multiplicités des courbes C^1 aux mêmes points étant aussi égale à p, on a en tenant compte de la formule (2) de III,

$$(x_1 + 1)(H + H'_1) + H'_1 = (x + 1)(H + H') + H' + K + K',$$

c'est l'équation (7) de III

La somme des multiplicités des courbes C^2 aux points O, $(\beta,1)$, ..., $(\beta,\alpha-1)$ doit être égale à p, donc on a

$$(H+H')(m-1)+H_1+H_1+\alpha(K+K')(n-1)+K'(n-1)+\alpha b+a=p.$$

En utilisant la formule (3) de III, on a

$$H_1 + H_1 = H + H' + (x' + 1)(K + K') + K'.\ ^{(1)}$$

On a donc

$$\lambda_2 = \lambda_1 - (H+H') + H_1 + H_1\ ,\ \mu_2 = \mu_1 - (K+K')$$

et puisque l'on doit avoir $\lambda_2 + \mu_2 > \lambda_1 + \mu_1$,

$$H_1 + H_1 > H + H' + K + K'.$$

3. Supposons que l'on ait maintenant $x_1 > x$.

Dans ces conditions, en raisonnant comme plus haut, on voit que les points, $(\alpha,\beta-1)$, ..., (α,x_1+2) sont multiples d'ordre a, le point (α,x_1+1) multiple d'ordre $a + H'_1$, les points (α,x_1), ..., $(\alpha,x+2)$ multiples d'ordre $a + H_1 + H'_1$, le point $(\alpha,x+1)$ d'ordre $a+H'(m-1) + H_1 + H'_1$, les points (α,x), ..., $(\alpha,1)$ d'ordre

$$\lambda_2 = a + (H+H')(m-1) + H_1 + H'_1.$$

On a encore $\mu_2 = b + (K+K')(n-1)$
et l'on arrive aux mêmes formules que dans le cas précédent.

En exprimant que la somme des multiplicités aux points des suites α, β est égale à p, on arrive aux mêmes formules qu'au paravant. Il est donc inutile de considérer séparément les cas x_1 inférieur ou supérieur à x. Nous ne le ferons plus dorénavant.

Nous avons supposé que la suite de points partant de O pour arriver au point P_1 passait par $(\alpha,1)$. Observons que d'après les formules établies, on a

$$\lambda_2 = \lambda_1 + H + H',\quad \mu_2 = \mu_1 - (K+K')$$

On peut donc dire que puisque l'on a $\lambda_2 + \mu_2 > \lambda_1 + \mu_1$, il existe au moins l'une des inégalités

$$\lambda_2 > \lambda_1,\quad \mu_2 > \mu_1.$$

(1) Cette formule est la formule (8) de III rectifiée, le signe =H' doit être remplacé par +H' dans cette dernière formule

Cela dicte le choix de celui des points $(\alpha,1)$, $(\beta,1)$ qui appartient à la suite considérée.

4. Sur la surface Φ_2, la droite ρ_1 rencontre les courbes τ_1 et τ_2. Le point de rencontre de ρ_1 avec τ_1 est certainement simple pour la surface. Projetons Φ_2 de ce point sur un hyperplan de l'espace ambiant. Nous obtenons une suiface Φ_3 et au centre de projection correspond sur cette surface une droite ρ_2 qui rencontre en un point O'_3 la projection de la courbe τ_1.

Sui la surface Φ_3 sont tracées une courbe σ_2 d'ordre a, une courbe τ_1 d'ordre $m-2$, une courbe τ_2 d'ordre $n-1$ et une courbe σ_β d'ordre b, une droite ρ_2.

Aux sections hyperplanes Γ^3 de Φ_3 correspondent sur F des courbes C^3 passant a fois par $(\alpha,\beta-1)$, $m-2$ fois par P, $n-1$ fois par P' b fois par $(\beta,\alpha-1)$ et une fois par un point P_2, uni de première espèce, au domaine duquel correspond la droite β.

Les courbes C^3 ont un commun un certain nombre de points infiniment voisins successifs de O aboutissant au point P_2 et situés sur une branche superliénaire. Celle-ci contient-elle le point $(\alpha,1)$ ou le point $(\beta,1)$? Dans le premier cas, la multiplicité de $(\beta,1)$ pour les courbes C^3 serait égale à μ_2, ce qui est absurde. C'est donc le point $(\beta,1)$ qui appartient à la branche en question.

Il existe donc des points infiniment voisins successifs de O, soient $(\beta,1)$, ..., (β,x'_1), (β,x'_1+1), $(\beta,x'_1+1,1)$, ..., P_2 appartenant à toutes les courbes C^3. Celles-ci passent b fois par les points $(\beta,\alpha-1)$, ..., $(\beta,x'+2)$, $b+K'(n-1)$ fois par $(\beta,x'+1)$, $b+(K+K')(n-1)$ par (β,x'), ..., (β,x'_1+2), $b+(K+K')(n-1)+K'_1$ fois par (β,x'_1+1),

$$\mu_3 = b + (K+K')(n-1) + K_1 + K'_1$$

fois par les points (β,x'_1), ..., $(\beta,1)$.

Les courbes C^3 passent a fois par $(\alpha,\beta-1)$, ..., $(\alpha,x+2)$, $a+H'(m-2)$ fois par $(\alpha,x+1)$, $a+(H+H')(m-2)$ fois par (α,x), ..., $(\alpha,1)$. On a donc

$$\lambda_3 = a + (H+H')(m-2).$$

On en déduit

$$\lambda_3 = \lambda_1 - 2(H+H'), \quad \mu_3 = \mu_1 - (K+K') + K_1 + K'_1,$$

ou encore

$$\lambda_3 = \lambda_2 - (H+H') + H_1 + H'_1, \quad \mu_3 = \mu_2 + K_1 + K'_1.$$

On doit avoir $\lambda_3 + \mu_3 > \lambda_2 + \mu_2$, donc

$$K_1 + K_1 > H + H' + H_1 + H_1 > 2(H+H') + K + K'.$$

La somme des multiplicités des courbes C^3 aux points O, $(\alpha,1)$, ..., $(\alpha,\beta-1)$ étant égale à p, on a

$$b + (K+K')(n-1) + K_1 + K_1' + (\hat{a}+1)(H+H')(m-2) + \\ + H'(m-2) + \beta a + b = p$$

et, en tenant compte de l'équation (2) de III,

$$K_1 + K_1' = 2(x+1)(H+H') + K + K'.$$

De même, en exprimant que la somme des multiplicités des courbes C^3 aux points O, $(\beta,1)$, ..., $(\beta,\alpha-1)$ et en tenant compte de l'équation (3) de III, on trouve

$$(x_1'+1)(K_1+K_1') + K_1' = 2(H+H') + (x_1'+1)(K+K') + K'.$$

5. Sur la surface Φ_3, la droite ρ_2 s'appuie sur la courbe τ_1 en un point O_3' simple pour la surface. Projetons la surface Φ_3 du point O_3' sur un hyperplan de l'espace ambiant. Nous obtenons une surface Φ_4 sur laquelle sont tracées une courbe σ_α d'ordre a, une courbe τ_1 d'ordre $m-3$, une courbe τ_2 d'ordre $n-1$, une courbe σ_β d'ordre b et une droite ρ_3 située dans le plan tangent à Φ_3 en O_3'.

Aux sections hyperplanes de la surface Φ_4 correspondent sur F des courbes C^4 passant a fois par le point $(\alpha,\beta-1)$, $m-3$ fois par P, $n-1$ fois par P', b fois par $(\beta,\alpha-1)$ et une fois par un point P_3 uni de première espèce au domaine duquel correspond la droite exceptionnelle ρ_3. Il existe donc une suite de points infiniment voisins successifs de O aboutissant au point P_3. Ces points appartiennent à une branche superlinéaire qui ne peut contenir le point $(\alpha,1)$, car alors la multiplicité de $(\beta,1)$ pour les courbes C^4 serait μ_2, ce qui est absurde. La branche en question contient donc le point $(\beta,1)$ et il existe une suite de points infiniment voisins successifs de O, $(\beta,1)$, ..., (β,x_2'), $(\beta,x_2'+1)$, $(\beta,x_2'+1,1)$, ..., P_3 appartenant à toutes les courbes C^4.

On peut reprendre pour les courbes C^4 les raisonnements faits pour les courbes C^3 et on trouve pour les multiplicités respectives des points $(\alpha,1)$, $(\beta,1)$,

$$\lambda_4 = a + (H+H')(m-3), \quad \mu_4 = b + (K+K')(n-1) + K_2 + K_2',$$

les nombres K_2 et K_2' étant premiers entre eux.

On trouve de même

$$K_2 + K'_2 = 3(x+1)(H+H') + K + K',$$

$$(x'_2+1)(K_2+K'_2) + K'_2 = 3(H+H') + (x'_2+1)(K+K') + K'.$$

6. Et ainsi de suite. Sur la surface Φ_1, les courbes Γ^1 passent par le point simple O_1, les courbes Γ^2 sont tangentes à la courbe τ_1 en ce point, les courbes Γ^3 osculent la courbe τ_1 en ce point.

Désignons par Γ^{m+1} les courbes ayant un contact d'ordre $m-1$ avec la courbe τ_1 en O_1 et découpées par des hyperplans. Soit Φ_{m+1} la surface ayant pour sections hyperplanes les courbes Γ^{m+1}.

Les courbes Γ^{m+1} coupent en a points σ_α, en o points la courbe τ_1, en $n-1$ points la courbe τ_2, en b points la courbe σ_β, en un point la droite ρ_m découpée par l'hyperplan ayant en O'_1 un contact d'ordre $m-2$ avec la courbe τ_1.

La droite ρ_m correspond à l'entourage d'un point P_{m+1} qui, en reprenant le raisonnement précédent, appartient à une suite superlinéaire d'origine O passant par les points $(\beta,1)$, ..., (β,x_m), (β,x_m+1), $(\beta,x_m+1,1)$, ..., P_{m+1}, infiniment voisins successifs de O, communs à toutes les courbes C^{m+1} homologues sur F des sections hyperplanes de la surface Φ_{m+1}.

Les courbes C^{m+1} passent a fois par les points $(\alpha,\beta-1)$, ..., $(\alpha,1)$ de sorte que les multiplicités des points $(\alpha,1)$, $(\beta,1)$ pour les courbes C^{m+1} sont

$$\lambda_{m+1} = a,\ \mu_{m+1} = b + (K+K')(n-1) + K_{m+1} + K'_{m+1},$$

les nombres K_{m+1} et K'_{m+1} étant premiers entre eux.

On a, en raisonnant comme plus haut,

$$K_{m+1} + K'_{m+1} = m(H+H') + K + K',$$

$$(x'_m+1)(K_{m+1}+K'_{m+1}) + K'_{m+1} = m(H+H') + (x'_m+1)(K+K') + K'.$$

7. Désignons par Γ'^3 les sections de Φ_1 par les hyperplans tangents à τ_2 en O'_1 et par Φ'_3 la surface dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ'^3.

Sur cette surface se trouvent tracées une courbe σ_α d'ordre a, une courbe τ_1 d'ordre $m-1$, une courbe τ_2 d'ordre $n-2$, une courbe σ_β d'ordre b et une droite exceptionnelle ρ_2 qui correspond au point de τ_2 infiniment voisin de O'_1.

Aux courbes Γ'^3 correspondent sur F des courbes C'^3 passant a fois par $(\alpha,\beta-1)$, $m-1$ fois par P, $n-2$ fois par P', b fois par $(\beta,\alpha-1$, une fois par un point P'_2, uni de première espèce, au domaine duquel correspond la droite ρ'_2.

Il y a une branche superlinéaire d'origine O qui passe par le point P'_3. Cette branche ne peut contenir le point $(\beta,1)$, car autrement les courbes C^4 auraient la même multiplicité que les courbes C^2 au point $(\alpha,1)$. Il cn résulte que les courbes C^4 passent par une série de points $(\alpha,1)$, ..., (α,x''_1), (α,x''_1+1), $(\alpha,x''_1+1,1)$, ..., P'_3.

On trouve que les multiplicités des points $(\alpha,1)$, $(\beta,1)$ sont respectivement

$$\lambda'_3 = a + (\mathrm{H}+\mathrm{H}')(m-1) + \overline{\mathrm{H}}_1 + \overline{\mathrm{H}}'_1,$$

$$\mu'_3 = b + (\mathrm{K}+\mathrm{K}')(n-2),$$

$\overline{\mathrm{H}}_1$ et $\overline{\mathrm{H}}'_1$ étant des entiers premiers entre eux.

Les courbes Γ'^4 sections de Φ_1 par les hyperplans touchant la courbe τ_2 en O'_1 ont pour homologues sur F des courbes C'^4 dont les multiplicités en $(\alpha,1)$, $(\beta,1)$ sont

$$\lambda'_4 = a + (\mathrm{H}+\mathrm{H}')(m-1) + \overline{\mathrm{H}}_2 + \overline{\mathrm{H}}'_2,$$

$$\mu'_4 = b = (\mathrm{K}+\mathrm{K}')(n-3).$$

Et ainsi de suite.

Les sections Γ'^{n+1} de Φ_1 par les hyperplans ayant en O'_1 avec τ_2 un contact d'ordre $n-1$, ont pour homologues sur la surface F des courbes C'^{n+1} qui ont en $(\alpha,1)$, $(\beta,1)$ les multiplicités

$$\lambda'_{n+1} = a + (\mathrm{H}+\mathrm{H}')(m-1) + \overline{\mathrm{H}}_n + \overline{\mathrm{H}}'_n, \quad \mu'_{n+1} = b,$$

$\overline{\mathrm{H}}_n$ et $\overline{\mathrm{H}}'_n$ étant des nombres premiers entre eux.

Liège, le 2 mars 1973.