Sur le quadrilatère de Demoulin

Lucien Godeaux

Résumé
Démonstration nouvelle de la condition pour que les côtés du quadrilatère de Demoulin décrivent des congruences W.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur le quadrilatère de Demoulin

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Démonstration nouvelle de la condition pour que les côtés du quadrilatère de Demoulin décrivent des congruences W.

On sait que les points caractéristiques de la quadrique de Lie attachée au point x d'une surface (x) sont le point x lui-même et quatre points sommets d'un quadrilatère gauche appelé quadrilatère de Demoulin du nom de celui qui a établit ce théorème (1). Nous avons démontré que si une arête du quadrilatère de Demoulin décrit une congruence W, il en est de même des autres (2). Si nous désignons par $\ldots, U^2, U^1, U, V, V^1, V^2, \ldots$ la suite de Laplace associée à la surface (x) dans l'espace à cinq dimensions (3), les côtés du quadrilatière de Demoulin ont pour images les intersections des droites V^1V^2, U^1U^2 avec l'hyperquadrique Q de Klein. Nous avons démontré que si les tangentes aux courbes v (ou u) tracées sur les surfaces engendrées par ces quatre points concourent en un même point, les côtés du quadrilatère de Demoulin engendrent des congruences W, et réciproquement (4). Notre but dans cette note est de donner une démonstration géométrique fort simple du théorème direct.

(1) DEMOULIN, *Sur la quadrique de Lie* (C.R., sept. 1908).

(2) *Sur les surfaces dont une arête du quadrilatère de Demoulin engendre une congruence* W (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1961, pp. 995-998).

(3) *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-41).

(4) *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé* (Mémoires in-8° de l'Académie roy. de Belgique, 1964, t. XXXIV, 84 p.).

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Désignons par U, V les points qui représentent les droites xx_u, xx_v sur l'hyperquadrique Q de Klein dans S_5, par

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots \tag{L}$$

la suite de Laplace L dont font partie U, V, chaque point étant le transformé de Laplace du précédent dans le sens des u. La suite L ne peut appartenir à un hyperplan.

Nous supposerons que les points U^2, V^2 n'appartiennent pas à Q, c'est-à-dire que la quadrique de Lie possède effectivement cinq points caractéristiques.

Désignons par C^1, C^2 les points d'intersection de Q avec la droite V^1V^2, par D^1, D^2 ceux de Q avec la droite U^1U^2.

Les droites $C^1C^1_v$ et $C^2C^2_v$ sont dans le plan VV^1V^2 et se coupent en un point A. De même, les droites $D^1D^1_u$ et $D^2D^2_u$ se coupent en un point B.

Les droites $C^1C^1_u$ et $C^2C^2_u$ sont situées dans le plan $V^1V^2V^3$ et se coupent en un point B′. De même les droites $D^1D^1_v$ et $D^2D^2_v$ se coupent en un point A′.

Les points A, B, A′, B′ appartiennent à une droite r conjuguée par rapport à Q de l'espace $V^1V^2U^1U^2$.

Aux points C^1, D^1, C^2, D^2 correspondent dans l'espace S_3 contenant la surface (x), des droites c_1, d_1, c_2, d_2 qui sont les côtés successifs du quadrilatère de Demoulin. Les diagonales de ce quadrilatère sont représentées par les intersections avec Q de la droite r.

2. Supposons que les points A, A′ d'une part, les points B, B′ d'autre part coïncident. Comme les points A, B appartiennent à des plans conjugués par rapport à Q, de même que les points A′ et B′, si A coïncide avec A′, B coïncide avec B′.

Les plans VV^1V^2 et $U^1U^2U^3$ passent par A. Montrons qu'ils ne peuvent avoir une droite en commun. Dans ce cas en effet, ils appartiendraient à un espace à trois dimensions et l'hyperplan passant par cet espace et par U contiendrait les points $V^2V^1VUU^1U^2U^3$ et la suite de Laplace L appartiendrait à cet hyperplan, ce qui est impossible.

Cela étant, le point A appartenant au plan VV^1V^2, la droite AA_u appartient à l'espace $VV^1V^2V^3$ et rencontre le plan $V^1V^2V^3$ en un point X. Le point A appartenant au plan $U^1U^2U^3$, la droite AA_u appartient à l'espace $UU^1U^2U^3$ et rencontre le plan UU^1U^2 en un point X'. Les plans UU^1U^2 et $V^1V^2V^3$ ont en commun le point B, donc les points X, X' coïncident avec ce point B.

La droite AA_u passe par le point B et on démontre de même que la droite BB_v passe par le point A.

Les points A et B sont donc transformés de Laplace l'un de l'autre.

3. Faisons varier u. A la droite C^1A correspond une droite s'appuyant sur la droite $C^1C^1_u = C^1B$ et sur la droite $AA_u = AB$, située dans le plan C^1AB, tangent à la surface (C^1) en C^1. La droite C^1A rencontre la droite VV^1 en un point C' et la droite $C'C'_u$ rencontre la droite V^1V^2 et comme on vient de le voir, le plan C^1AB. Elle passe donc par le point C^1 et on en conclut que les points C^1 et C' sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Par conséquent le point C^1 satisfait à une équation de Laplace et d'après un théorème classique de Darboux, la droite c_1 décrit une congruence W.

De la même manière, on démontre qu'il en est de même des autres côtés du quadrilatère de Demoulin. On peut donc énoncer le théorème suivant:

Si les tangentes aux lignes v (ou u) tracées sur les surfaces qui représentent sur l'hyperquadrique de Klein les côtés du quadrilatère de Demoulin concourent en un même point, ces côtés engendrent des congruences W.

4. Reprenons la suite L associée à la surface (x) dans S_5. Supposons que les plans VV^1V^2 et $U^1U^2U^3$ aient un point commun A. Les plans VV^1V^2 et UU^1U^2, $U^1U^2U^3$ et $V^1V^2V^3$ étant conjugués par rapport à Q, l'hyperplan polaire de A contient les plans UU^1U^2 et $V^1V^2V^3$, qui ont donc en commun un point B. Observons que si nous partions de l'hypothèse que ces deux derniers plans ont en commun un point B, le même raisonnement montrerait que les plans VV^1V^2 et $U^1U^2U^3$ ont en commun un point A.

L'espace conjugué de la droite AB par rapport à Q est $V^1V^2U^1U^2$.

Comme plus haut, on démontre que le point B est le transformé de Laplace dans le sens des u du point A et que le point A est celui de B dans le sens des v.

L'hyperplan polaire de A passe par la droite V^1V^2 donc par C^1.

La droite AC^1 est donc tangente à Q en C^1 et par conséquent à la surface (C^1). D'autre part, la tangente en C^1 à la surface (C^1) située dans le plan VV^1V^2 est la tangente à la ligne v, donc la droite $C^1C_v^1$ passe par A. On démontrerait de même que les droites $C^2C_v^2$, $D^1D_v^1$, $D^2D_v^2$ passent par A. Nous sommes donc dans les conditions du théorème précédent et nous pouvons énoncer le théorème:

Si dans la suite de Laplace L *associée à la surface* (x), *les plans* VV^1V^2 et $U^1U^2U^3$ *(ou les plans* UU^1U^2 *et* $V^1V^2V^3$*) ont un point commun, les côtés du quadrilatère de Demoulin décrivent des congruences* W.

Liège, le 29 décembre 1972.