

Sur les surfaces du quatrième ordre touchant quatre plans le long de quatre droites,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans ses recherches sur les surfaces hyperelliptiques ⁽¹⁾, M. L. Remy a rencontré une surface du quatrième ordre passant par quatre droites r_1, r_2, r_3, r_4 et touchant, le long de chacune de ces droites, respectivement des plans $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$. Il est revenu plus tard sur cette surface pour en donner quelques propriétés géométriques ⁽²⁾. Nous nous proposons de montrer, dans cette note, qu'inversement, une surface du quatrième ordre touchant quatre plans le long de quatre droites, est hyperelliptique.

1. Soient R_1, R_2, R_3, R_4 les sommets d'un tétraèdre, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ les faces opposées, r_1, r_2, r_3, r_4 des droites deux-à-deux gauches, situées respectivement dans les plans $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$. Considérons une surface F , du quatrième ordre, passant par les droites r_1, r_2, r_3, r_4 en touchant respectivement, le long de ces droites, les plans $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$.

Appelons $\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3, \rho'_4$ les plans qui projettent les droites r_1, r_2, r_3, r_4 des points R_1, R_2, R_3, R_4 respectivement. Dans la seconde de ses notes citées, M. L. Remy montre que les plans $\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3, \rho'_4$ forment un tétraèdre inscrit et circonscrit au tétraèdre donné. En prenant ce dernier comme tétraèdre de référence, on écrit facilement l'équation de la surface F , équation qui dépend d'un paramètre (coefficient du terme en $x_1 x_2 x_3 x_4$).

Le plan ρ_i coupe F suivant une courbe formée de la droite r_i comptée deux fois et d'une conique α_i , courbe rationnelle de degré —2.

La surface F possède trois points doubles coniques sur la droite r_i . Nous désignerons par $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}$ les courbes rationnelles infiniment petites, de degré —2, équivalentes, au point de vue des transformations birationnelles, à ces points doubles.

(1) Sur une famille de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre (*C. R.*, 19 novembre 1906, pp. 767-769).

(2) Sur deux surfaces du quatrième ordre liées à l'octuple gauche complet (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1907, pp. 6-19).

La surface F , ne possédant qu'un nombre fini de points doubles, est de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

2. Appelons Γ les sections planes de la surface F et considérons le système

$$|C| = |\Gamma + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4|.$$

Ce système est découpé sur F par les surfaces du cinquième ordre touchant les plans $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ respectivement le long des droites r_1, r_2, r_3, r_4 . Les courbes C sont de genre sept, de degré douze et ne rencontrent pas les courbes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}$ ($i=1, 2, 3, 4$). Le système $|C|$ a la dimension sept.

En rapportant projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_7 à sept dimensions, on transforme F en une surface normale F' d'ordre douze, possédant seize points doubles coniques, qui correspondent aux coniques α_i et aux points doubles $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}$ de F .

Pour démontrer que F' est hyperelliptique, il suffit de prouver l'existence, sur cette surface, d'un système linéaire $|C_0|$ satisfaisant à la relation fonctionnelle ⁽³⁾

$$2C \equiv 2C_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \sum \alpha_{i1} + \sum \alpha_{i2} + \sum \alpha_{i3}, \quad (1)$$

ou, en d'autres termes, qu'il existe une courbe C_0 passant par les seize points doubles de F' le long de laquelle une hyperquadrique de S_7 touche cette surface.

3. Revenons à la surface F et remplaçons, dans la relation (1), C en fonction de Γ . Nous obtenons

$$2\Gamma + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \equiv 2C_0 + \sum \alpha_{i1} + \sum \alpha_{i2} + \sum \alpha_{i3}. \quad (2)$$

Les courbes

$$2\Gamma + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

sont découpées, sur la surface F , par les surfaces du sixième ordre (ne comprenant par F comme partie) passant par les droites r_1, r_2, r_3, r_4 et touchant le long de ces droites respectivement les plans $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$.

⁽³⁾ Voir notre Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914, pp. 289-312) et notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

Le système linéaire formé par ces surfaces du sixième ordre est équivalent au double du système linéaire ∞^3 formé par les surfaces cubiques φ passant par les droites r_1, r_2, r_3, r_4 . Ces surfaces φ découpent sur F des courbes d'ordre huit, de genre trois, passant simplement par les douze points doubles de la surface et rencontrant en un point chacune des coniques $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Les courbes C_0 ainsi obtenues satisfont bien à la relation fonctionnelle (2) et, par conséquent, à la relation fonctionnelle (1). Il en résulte que la surface F est bien hyperelliptique (de rang deux).

Sur la surface F' , les courbes C_0 sont d'ordre douze et, d'après la relation fonctionnelle (1), elles sont bien de genre trois.

4. Les surfaces cubiques φ passent par les droites r_1, r_2, r_3, r_4 et par les deux droites s'appuyant sur les précédentes; elles forment un système homaloïdal. En rapportant projectivement les surfaces φ aux plans de l'espace, on obtiendra donc une surface F_0 , transformée birationnelle de F , dont les sections planes seront les courbes C_0 .

La surface F_0 passe par quatre droites s_1, s_2, s_3, s_4 , deux-à-deux gauches.

Aux courbes infiniment petites $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$, par exemple, correspondent trois droites de F_0 s'appuyant sur s_2, s_3, s_4 .

A la conique α_1 , par exemple, correspond une droite s'appuyant sur s_1 .

A la droite r_1 correspond une conique qui, avec les droites s_2, s_3, s_4 et $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$, forme l'intersection complète de la surface F_0 avec la quadrique déterminée par s_2, s_3, s_4 .

La conique r_1 et la droite α_1 se trouvent dans un plan passant par s_1 .

La droite α_1 rencontre la conique r_1 en deux points et chacune des coniques r_2, r_3, r_4 en un point.

Sur la surface F_0 , les courbes C sont découpées par les surfaces du septième ordre ayant pour droites doubles s_1, s_2, s_3, s_4 et passant simplement par les coniques r_1, r_2, r_3, r_4 . Le système linéaire formé par ces surfaces comprend les surfaces cubiques passant par les quatre droites s_1, s_2, s_3, s_4 jointes aux plans $s_1 \alpha_1, s_2 \alpha_2, s_3 \alpha_3, s_4 \alpha_4$.

Liège, le 15 septembre 1941.