Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 9 janvier 1937, n° 1.

Sur quelques surfaces algébriques hyperspatiales,

par Lucien GODEAUX,
Correspondant de l'Académie.

Certaines recherches sur les involutions appartenant à une surface algébrique nous avaient amené autrefois à étudier certaines surfaces communes à des hypersurfaces et à un cône projetant une surface de Veronese [1]. Plus généralement, on peut considérer la surface section d'un cône projetant d'un point une surface dont les sections hyperplanes représentent les courbes d'ordre m d'un plan, par une hypersurface de l'espace ambiant. C'est l'étude de cette surface qui fait l'objet de ce travail. Une telle surface, F, contient un réseau de courbes C appartenant chacune à un espace linéaire à $m+1$ dimensions. Nous montrons que le système canonique de la surface F est un multiple de ce réseau et nous déterminons les genres de la surface, qui est régulière.

1. Considérons la surfaces Ψ, d'ordre m^2, obtenue en rapportant projectivement les courbes planes d'ordre m, d'un plan ϖ, aux hyperplans d'un espace linéaire S_{r-1} à $r-1$ dimensions, où

$$r = \frac{1}{2}(m+1)(m+2).$$

[1] Une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence, appartenant à une surface de genre trois. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1921, pp. 653-665, 694-702.) Sur une famille de surfaces algébriques de l'espace à six dimensions. (*Bull. de la Soc. Math. de France*, 1925, pp. 484-503.) Sur quelques involutions appartenant à la surface de Humbert généralisée. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1936, pp. 210-251, 438-446.)

Supposons cet espace S_{r-1} plongé dans un espace linéaire S_r à r dimensions et projetons la surface Ψ d'un point O de cet espace n'appartenant pas à S_{r-1}; nous obtenons ainsi un cône V_3 d'ordre m^2, à trois dimensions.

La surface Ψ contient un réseau de courbes rationnelles normales d'ordre m, correspondant aux droites du plan ϖ et par suite le cône V_3 contient un réseau de cônes d'ordre m, chacun de ces cônes appartenant à un espace linéaire à $m+1$ dimensions.

Coupons le cône V_3 par une hypersurface V_{r-1}^n, d'ordre n, ne passant pas par O; nous obtenons ainsi une surface F d'ordre nm^2. La variété V_{r-1}^n coupe chacun des cônes d'ordre m de V_3 suivant une courbe C d'ordre mn et la surface F contient donc un réseau de courbes $|C|$. Deux des cônes d'ordre m de V_3 ont en commun une seule droite, par conséquent le réseau $|C|$ a le degré n.

Pour calculer le genre d'une courbe C, projetons le cône d'ordre m qui la contient de $m-1$ de ses points sur un plan; la projection de C est une courbe d'ordre mn ayant un point multiple d'ordre $n(m-1)$ auquel sont infiniment voisins $m-1$ points multiples d'ordre n; le genre de cette courbe et par conséquent celui des courbes C est donc

$$\pi = \frac{1}{2}(n-1)(nm-2).$$

Les sections hyperplanes de la surface F sont les courbes du système $|mC|$; ce système est de degré nm^2 et de genre $\frac{1}{2}(nm-1)(nm-2)$.

Aux courbes d'ordre $\mu < m$ du plan ϖ correspondent sur Ψ des courbes d'ordre μm. En projetant ces courbes du point O et en coupant par la variété V_{r-1}^n, on obtient sur F des courbes d'ordre μmn, formant le système $|\mu C|$, de degré μn, de genre

$$\frac{1}{2}\mu(n-1)(nm-2) + \frac{1}{2}(\mu-1)(\mu n-2)$$

et de dimension

$$\frac{1}{2}\mu(\mu+3).$$

2. Nous allons déterminer le système canonique de la surface F et dans ce but déterminer le système adjoint du système $|m\mathrm{C}|$ des sections hyperplanes.

Coupons la surface F par un hyperplan ξ; à la section correspond dans le plan ϖ une courbe d'ordre mn, en général dépourvue de points doubles. Les adjointes de cette courbe dans le plan ϖ sont les courbes d'ordre $mn - 3$. A ces courbes correspondent sur la surface F des courbes du système $|(nm - 3)\,\mathrm{C}|$, qui est donc l'adjoint du système des sections hyperplanes :

$$|(m\mathrm{C})'| = |(nm-3)\,\mathrm{C}|.$$

On en déduit

$$|\mathrm{C}'| = |(nm-m-2)\,\mathrm{C}|.$$

Le système canonique de la surface F est donc

$$|\mathrm{L}| = |(nm-m-3)\,\mathrm{C}|.$$

Dans le plan ϖ, le système des courbes d'ordre $nm - 3$ découpe la série canonique complète sur une courbe d'ordre mn, par conséquent sur F le système adjoint de celui, $|m\mathrm{C}|$, des sections hyperplanes découpe la série canonique complète sur une courbe de ce système. Il en résulte que la surface F est régulière ($p_a = p_g$).

D'autre part, en évaluant le degré $p^{(1)} - 1$ du système canonique $|\mathrm{L}|$, on trouve que le genre linéaire de F est

$$p^{(1)} = n\,(nm-m-3)^2.$$

3. Pour obtenir les équations de la surface Ψ dans l'espace S_{r-1}, on sait que l'on pose

$$\rho\mathrm{X}_{ikl} = x_1^i x_2^k x_3^l, \qquad (i+k+l=m)$$

en interprétant les x comme coordonnées des points du plan ϖ et les X comme coordonnées des points de S_{r-1}.

Plaçons-nous dans l'espace S_r et soient X_0, X_{ikl} les coordonnées des points de cet espace, le point O étant donné par $X_{ikl}=0$, $X_0 \neq 0$ et l'espace S_{r-1} par $X_0=0$. Posons

$$\rho X_0 = x_0 x_1^{m-1}, \qquad \rho X_{ikl} = x_1^i x_2^k x_3^l; \tag{1}$$

interprétons x_0, x_1, x_2, x_3 comme coordonnées des points d'un espace S_3.

Par les équations (1), à un point de S_3 correspond un seul point du cône V_3. Inversement, aux sections hyperplanes du cône V_3, les équations (1) font correspondre des monoïdes d'ordre m de sommet (1, 0, 0, 0) et, par conséquent, à un point de V_3 correspond un seul point de S_3. Le cône V_3 et l'espace S_3 sont donc liés par une correspondance birationnelle.

La surface F est découpée sur le cône V_3 par une hypersurface V_{r-1}^n dont l'équation peut s'écrire

$$X_0^n \varphi_0 + X_0^{n-1}\varphi_1 + \cdots + \varphi_n = 0, \tag{2}$$

où les φ sont des formes algébriques en X_{ikl} dont le degré est indiqué par l'indice. Par les relations (1), il correspond à l'équation (2) une équation de la forme

$$x_0^n x_1^{n(m-1)}\varphi_0 + x_0^{n-1} x_1^{(n-1)(m-1)}\psi_m + \cdots + \psi_{nm} = 0, \tag{3}$$

où les ψ sont des formes algébriques en x_1, x_2, x_3 dont le degré est indiqué par l'indice. L'équation (3) représente une surface birationnellement équivalente à F.

Nous allons déterminer le nombre de courbes linéairement indépendantes du système $|m\lambda C|$, découpé sur la surface F par les hypersurfaces d'ordre λ, λ étant un entier compris entre 1 et $n-1$.

L'équation d'une hypersurface V_{r-1}^λ peut s'écrire

$$X_0^\lambda + X_0^{\lambda-1}\alpha_1 + \cdots + \alpha_\lambda = 0,$$

les α étant des formes algébriques en X_{ikl} de degrés égaux aux indices. A la section du cône V_3 par cette variété correspond dans S_3, par les formules (1), la surface

$$x_0^\lambda x_1^{\lambda(m-1)} + x_0^{\lambda-1} x_1^{(\lambda-1)(m-1)} A_m + \cdots + A_{\lambda m} = 0,$$

où les A sont des formes algébriques en x_1, x_2, x_3 de degrés indiqués par les indices.

Le nombre de termes de cette dernière équation est

$$r_\lambda + 1 = \frac{1}{2} m^2 \Sigma i^2 + \frac{1}{2} m \Sigma i + \lambda + 1, \qquad (i = 0, 1, \ldots, \lambda)$$

d'où

$$r_\lambda + 1 = \frac{1}{12} (\lambda + 1) [m^2 \lambda (2\lambda + 1) + 9 m \lambda + 12].$$

r_λ est donc la dimension du système $|m\lambda C|$, $(0 < \lambda < n)$.

4. Nous allons maintenant déterminer la valeur du genre géométrique de la surface F.

Supposons en premier lieu $m = 2$. Le système canonique de F est

$$|L| = |(2n - 5) C| = |2(n - 1) C - C|.$$

Le système $|2(n - 1) C|$ a la dimension

$$r_{n-1} = \frac{1}{6} (n - 1) [(n - 2)(4n + 3) + 6] - 1.$$

C'est, d'autre part, l'adjoint du réseau $|C|$, dont le genre est $\pi = (n - 1)^2$. Par conséquent, le système $|2(n - 1) C|$ découpe, sur une courbe C, une série de dimension $(n - 1)^2 - 1$ et il existe $r_{n-1} - (n - 1)^2$ courbes canoniques linéairement indépendantes. On a donc

$$p_g = r_{n-1} - (n - 1)^2 = \frac{1}{6} (n - 1)(n - 2)(4n - 3),$$

résultat que nous avions déjà obtenu antérieurement [1].

Supposons en second lieu $m = 3$. Le système canonique est

$$|L| = |3(n - 2) C|$$

et l'on a $p_g = r_{n-2} + 1$, c'est-à-dire

$$p_g = \frac{1}{2} (n - 1) [3n (n - 2) + 2].$$

---

(1) Sur une famille de surfaces... (*loc. cit.*).

Supposons enfin $m > 3$. Le système canonique de F est

$$|L| = |m(n-1)C - 3C|.$$

On en déduit que le système $|m(n-1)C|$ est l'adjoint du système $|3C|$. Ce dernier est de genre $\frac{3}{2}mn(n-1)+1$ et, par conséquent, le genre géométrique de F est

$$p_g = r_{n-1} - \frac{3}{2}mn(n-1) - 1,$$

On a donc

$$p_g = \frac{1}{12}(n-1)[m^2n(2n-1) - 9nm + 12].$$

En résumé, *la surface* F *est régulière et de genre*

$$p_g = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-3) \qquad \text{si } m = 2,$$

$$p_g = \frac{1}{2}(n-1)(3n^2 - 6n + 2) \qquad \text{si } m = 3,$$

$$p_g = \frac{1}{12}(n-1)[m^2n(2n-1) - 9mn + 18] \quad \text{si } m > 3;$$

son genre linéaire est

$$p^{(1)} = n(nm - m - 3)^2 + 1$$

et son système canonique

$$|L| = |(nm - m - 3)C|,$$

$|C|$ *étant un réseau de degré* n *et de genre* $\frac{1}{2}(n-1)(nm-2)$.

5. Considérons quelques cas particuliers de la surface F.

Les surfaces F de genres un ($p_a = P_4 = 1$) sont obtenues dans le cas où les courbes canoniques sont d'ordre zéro, c'est-à-dire quand on a $m(n-1) = 3$. On doit donc avoir $m = 3$, $n = 2$. La surface obtenue a été signalée par M. Enriques [1]. Le genre des courbes C étant égal à deux,

---

[1] *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche.* (Padova, 1932) Voir p. 308.

cette surface est birationnellement équivalente à un plan double.

Les surfaces F dont le système canonique coïncide avec le réseau $|C|$ sont données par $m(n-1)=4$. On a, soit $m=2$, $n=3$, soit $m=4$, $n=2$. Dans le premier cas, il s'agit de la surface de Humbert généralisée. Dans le second cas, on a

$$p_a = p_g = 3, \qquad p^{(1)} = 3.$$

Les sections hyperplanes de cette surface forment le système 4 — canonique.

Les surfaces F dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes sont données par $m(n-1)-3=m$, d'où $m=n=3$. On obtient ainsi une surface canonique signalée par M. Enriques [1] et dont les genres sont $p_a = p_g = 11$, $p^{(1)} = 28$.

Liége, décembre 1936.

[1] *Lezioni...* (*loc. cit.*). Voir p. 338.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.