Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 9 novembre 1935, n° 11

CONCOURS ANNUEL DE 1935

Première question :

On demande de nouvelles recherches sur les propriétés des variétés algébriques à trois dimensions qui sont invariantes par rapport aux transformations birationnelles. Un travail, portant la devise « Fugit irreparabile tempus », a été reçu en réponse à cette question.

Rapport de M. L. Godeaux, premier Commissaire.

Le mémoire que nous avons à examiner et dont nous désignerons l'auteur par N., porte pour titre : *Quelques résultats nouveaux dans la géométrie sur une* V_3 *algébrique;* il est divisé en trois parties.

La première partie, qui sert d'introduction, résume des recherches récentes sur les systèmes invariants appartenant à une variété algébrique à trois dimensions et qui sont le point de départ de l'auteur. On sait que Brill et Noether ont construit la géométrie sur une courbe algébrique en partant de la notion de série linéaire de groupes de points. Cette notion peut s'étendre aux surfaces algébriques de deux manières, soit en considérant les systèmes de courbes, soit en prenant comme éléments les systèmes de groupes de points. La première extension est immédiate et a conduit aux recherches si profondes de MM. Castelnuovo, Enriques, Severi et de leurs élèves. La seconde extension n'a été faite que tout récemment par M. Severi (1932), qui a introduit les séries d'équivalence de groupes de points. Sur une variété algébrique à trois dimensions, on est conduit à considérer des systèmes linéaires de surfaces et des séries d'équivalence de courbes et de groupes de points. On connaît, d'autre part, le procédé imaginé par M. Enriques pour introduire les systèmes canoniques des courbes, surfaces et variétés algébriques, systèmes invariants vis-à-vis des transformations birationnelles de ces entités. On pourrait résumer ce procédé de la manière suivante : On considère sur une variété algébrique V un système d'éléments $|A|$ (système linéaire ou série d'équivalence de Severi). En imposant certaines singularités aux éléments de $|A|$, on en déduit un système covariant $|A_j|$, puis, par addition et soustraction des systèmes $|A|$, $|A_j|$ et éventuellement de systèmes déduits d'autres systèmes invariants déjà connus, un nouveau système invariant. Ainsi, sur une surface algébrique, en partant de la jacobienne d'un réseau de courbes, on construit le système canonique; en partant du groupe des points doubles pour des courbes d'un faisceau linéaire, on obtient la série d'équivalence de Severi; en partant, au contraire, du groupe des points de rebroussement des courbes d'un réseau, on obtient la série d'équivalence d'Enriques. Dans le cas d'une variété algébrique à trois dimensions, M. B. Segre a introduit récemment, outre le système des surfaces canoniques déjà connu, une série d'équivalence invariante de courbes obtenue en partant de la jacobienne d'un réseau de surfaces et une série d'équivalence invariante de groupes de points en partant du groupe de points doubles pour des surfaces d'un faisceau linéaire. Il a aussi considéré des séries d'équivalence invariantes qui se déduisent des précédentes et du système canonique. Ce sont ces résultats de M. B. Segre que N. résume dans la première partie de son mémoire, en en précisant les caractères dans les cas où les séries sont virtuelles.

Dans la seconde partie de son mémoire, N. étudie les correspondances algébriques d'indices quelconques entre deux surfaces ou deux variétés algébriques à trois dimensions. Le problème consiste dans la construction des systèmes et séries d'équivalence invariants d'une des surfaces ou variétés, connaissant ceux de l'autre et les caractères de la correspondance. Dans le cas des surfaces, ce problème a fait l'objet de travaux importants de MM. Castelnuovo, Enriques et Severi; il a été repris tout récemment par ce géomètre. D'un autre côté, M. Albanese, se plaçant surtout au point de vue transcendant, a consacré l'an dernier d'importants mémoires à ces questions. Il faut également citer une note récente de M. Maroni, parue après le dépôt du mémoire de N. (1er août 1934). N. reprend la question *ab ovo* et obtient des résultats nouveaux.

Dans le cas des variétés à trois dimensions, Tafani avait étudié le problème dans des cas particuliers. N. traite complètement le cas général, surmontant de réelles difficultés. Il déduit ensuite de ses résultats de nouvelles propriétés des transformations birationnelles entre variétés.

Dans la troisième partie de son mémoire, N. établit des propriétés importantes des systèmes de surfaces appartenant à une variété algébrique à trois dimensions. MM. Castelnuovo et Enriques ont montré que le nombre des intégrales simples de première espèce, indépendantes, attachées à une variété à trois dimensions, est égal à l'irrégularité q_2 d'une surface tracée sur la variété et appartenant à un système linéaire au moins doublement infini, à intersections variables irréductibles; le nombre q_2 est l'irrégularité superficielle de la variété. N. donne une élégante interprétation géométrique du nombre q_2 : Si l'on considère sur une variété algébrique à trois dimensions V un réseau de surfaces $|F|$ à intersections variables en général irréductibles, il existe q_2 surfaces linéairement indépendantes du système linéaire $|2F+F'|$ passant par la courbe jacobienne du réseau. N. démontre ensuite que si l'on considère sur V un système linéaire complet, au moins simplement infini, les surfaces de ce système découpent sur l'une d'entre elles un système linéaire dont le défaut est au plus égal à q_2; il en déduit une extension du théorème de Riemann-Roch. Le mémoire se termine par des recherches sur le nombre M des modules d'une variété algébrique à trois dimensions. Reprenant un raisonnement de M. Rosenblatt, mais en le précisant et le généralisant, N. ramène le calcul du nombre M à celui d'un nouvel invariant de la variété. Dans le cas où l'irrégularité superficielle de celle-ci n'est pas nulle, N. obtient en outre une limite supérieure de M. (Il n'est pas inutile de rappeler que le problème du calcul du nombre des modules d'une surface algébrique n'est pas résolu).

Le mémoire portant pour devise « Fugit irreparabile tempus » est riche de résultats nouveaux et fait faire à la géométrie sur une variété algébrique des progrès importants. Nous avons l'honneur de proposer à l'Académie de couronner ce travail et d'en décider l'impression dans le recueil des *Mémoires*.

MM. A. Demoulin et Ch-J. de La Vallée Poussin se rallient aux conclusions du premier rapporteur.

La Classe, se ralliant à la proposition des Commissaires, attribue le prix à l'auteur de ce travail, M. Beniamino Segre, professeur à l'Université royale de Bologne.

L'impression dans les *Mémoires* in-8° du travail couronné est votée.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.