Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 5 mai 1936, n° 5.

Sur les involutions cycliques du troisième ordre et de genres un appartenant à une surface algébrique,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Une surface Φ, de genres un ($p_a = P_4 = 1$), représentant une involution cyclique d'ordre trois, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique F, possède certaines singularités aux points de diramation. Si ces singularités sont sans influence sur les courbes canoniques d'une surface, la surface F possède une courbe canonique d'ordre zéro; c'est une surface de Picard ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$) ou une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Dans le premier cas, la surface Φ possède neuf points doubles biplanaires [1], dans le second six points doubles biplanaires [2]. Mais il peut se faire que les singularités de la surface Φ aux points de diramation aient une influence sur les courbes canoniques; dans ces conditions, la surface F possède des courbes canoniques effectives et à l'une de celles-ci correspond, sur la surface Φ, une courbe exceptionnelle. Dans une note récente [3], nous avons ren-

(1) ENRIQUES et SEVERI, Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques. (*Acta Mathematica*, 1909, t. 32, pp. 283-392; t. 33, pp. 321-399.)

(2) Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un. (*Annales de l'Ecole normale supérieure*, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70.)

(3) Sur quelques involutions appartenant à la surface de Humbert généralisée. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1936, pp. 240-251.)

Au sujet de la théorie des involutions, nous renvoyons le lecteur à notre fascicule sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. Exposés de géométrie publiés sous la direction de M. E. Cartan. (Paris, Hermann, 1935, 43 p.)

contré un exemple de ce fait. Nous nous proposons actuellement de rechercher dans quelles conditions les circonstances précédentes peuvent se reproduire. Nous établissons précisément le théorème suivant:

Si une surface algébrique régulière, dont le système canonique n'est ni un faisceau ni composé au moyen d'un faisceau, possède une involution cyclique du troisième ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, de genres un ($p_a = P_4 = 1$), *cette surface a les genres* $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 4$, $P_2 = 6$, ... *La surface de genres un image de l'involution est birationnellement identique à un plan double dont la courbe de diramation, du sixième ordre, possède six tritangentes passant par un même point.*

Nous retrouvons d'ailleurs l'exemple que nous avions rencontré et nous montrons qu'il correspond au cas où la courbe de diramation du plan double appartient au faisceau déterminé par les six tritangentes et par une cubique comptée deux fois.

1. Soit F une surface algébrique régulière ($p_a = p_g$) dont le système canonique $|C|$ n'est ni un faisceau ni composé au moyen d'un faisceau ($p_g \geqslant 3$). Supposons que la surface F contienne une involution cyclique I_3, d'ordre trois, possédant α points unis parfaits et β points unis non parfaits. Soient Φ une surface image de l'involution I_3, T la transformation birationnelle de F en elle-même génératrice de I_3.

La surface Φ est régulière et son genre arithmétique π_a est donné par la relation [1]

$$3(p_a + 1) = 9(\pi_a + 1) - \alpha - 2\beta.$$

Nous supposerons que le système canonique $|C|$ de F n'est pas composé au moyen de l'involution I_3. Alors, aux courbes canoniques de Φ correspondent, sur F, des cour-

(1) Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique. (*Bull. de la Soc math. de France*, 1919, pp. 1-16.)

bes C passant simplement par les α points unis parfaits et formant un système linéaire partiel, composé au moyen de I_3.

Le système canonique $|C|$ de F est transformé en lui-même par T.

2. Supposons que la surface Φ soit de genres un ($p_a = P_4 = 1$), c'est-à-dire une surface à courbe canonique d'ordre zéro. Alors, il doit exister une seule courbe C passant simplement par les α points unis parfaits de I_3, invariante pour la transformation T. Sur cette courbe, que nous désignerons par C_0, T doit engendrer une involution rationnelle du troisième ordre, la courbe Γ_0 lui correspondant sur Φ devant être une courbe exceptionnelle. En appliquant la formule de Zeuthen on en déduit que le genre linéaire de F est $p^{(1)} = \alpha - 2$.

D'autre part, on a

$$3p_a = 15 - \alpha - 2\beta.$$

Comme $p^{(1)}$ est au moins égal à trois, on a $\alpha > 4$. De plus, comme p_a est au moins égal à trois par hypothèse, $\alpha + 2\beta$ est en plus égal à six. En tenant compte du fait que $\alpha + 2\beta$ doit être multiple de 3, on en déduit $\alpha = 6$, $\beta = 0$, $p_a = 3$, $p^{(1)} = 4$.

Le système bicanonique $|2C|$ de F a le degré 12, le genre 10 et la dimension $P_2 - 1 = 6$. Le système tricanonique $|3C|$ a le degré 27, le genre 19 et la dimension $P_3 - 1 = 12$, etc.

3. Rapportons projectivement les courbes C aux droites d'un plan ϖ. A la surface F correspond un plan triple F* de support ϖ et à la transformation T correspond une transformation birationnelle T* du plan ϖ échangeant entre elles les droites de ce plan. T* est donc une homographie cyclique, de période trois.

Deux cas peuvent se présenter :

1° T* est une homologie de centre A et d'axe a, nécessairement générale. Alors, à la courbe C_0 correspond l'axe a. Aux droites passant par A correspondent sur F des courbes canoniques C_1, unies pour T, formant un faisceau dont la base est formée de trois points d'un groupe de I_3 n'appartenant pas à C_0.

2° T^* n'est pas une homologie et possède donc trois points unis A_0, A_1, A_2. A la courbe C_0 correspond par exemple la droite $A_1 A_2$ et à trois des points unis de I_3 situés sur C_0 correspond le point A_1, aux trois autres correspond le point A_2. Aux droites $A_0 A_2$, $A_0 A_1$ correspondent sur F deux courbes canoniques C_1, C_2, unies par T. Les courbes C_1, C_2 ont en commun un groupe de I_3 n'appartenant pas à C_0; la courbe C_1 passe par trois des points unis de I_3, que nous désignerons par A_{11}, A_{12}, A_{13}; la courbe C_2 passe par les trois autres points unis A_{21}, A_{22}, A_{23} de I_3.

4. Examinons le premier cas. Le système bicanonique $|2C|$ de F contient trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_3 et comprenant respectivement les courbes $2C_0$, $2C_1$, C_0+C_1.

Aux courbes C_1 correspondent sur Φ des courbes Γ_1, de genre deux, formant un faisceau. Celui-ci possède un point-base A', image du groupe de I_3 commun aux courbes C_1. D'autre part, les courbes Γ_1 rencontrent la courbe Γ_0 en un point variable.

La courbe bicanonique de Φ est unique et par conséquent à la courbe exceptionnelle Γ_0 comptée deux fois doit correspondre sur F une courbe unique; la courbe $2C_0$ fait donc partie d'un système linéaire composé au moyen de I_3, de dimension zéro.

La courbe Γ_0 étant rationnelle, les courbes $\Gamma_0+\Gamma_1$ sont de genre deux et forment un réseau, puisque la surface Φ est de genres un. La courbe C_0+C_1 appartient donc à un réseau composé au moyen de I_3.

Le système bicanonique $|2C|$ ayant la dimension six, le système composé au moyen de I_3 et comprenant les courbes $2C_1$ doit, d'après la théorie des homographies cycliques, avoir la dimension deux. Toutes les courbes de ce système sont donc réductibles en deux courbes C_1.

5. Désignons par $A_1, A_2, \dots, A_6$ les points unis de l'involution I_3 et considérons la courbe C_1, soit C_{11}, passant par le point A_1. Soit Γ_{11} la courbe qui lui correspond sur Φ. Pour pouvoir appliquer la formule de Zeuthen à la correspondance (1,3) entre les courbes Γ_{11}, C_{11}, il faut nécessairement que cette dernière ait un point triple en A_1. La courbe C_{11} est alors elliptique et la courbe Γ_{11} rationnelle. La courbe Γ_{11} rencontre en trois points la courbe rationnelle de diramation γ_1, infiniment petite, correspondant à A_1.

On arrive à des conclusions analogues pour les courbes $C_{12}, \dots, C_{16}$ du faisceau $|C_1|$ passant par $A_2, \dots, A_6$.

Cela étant, rapportons projectivement les courbes du réseau $|\Gamma_0 + \Gamma_1|$ aux droites d'un plan. A la surface Φ correspond un plan double Φ^* dont nous allons déterminer la courbe de diramation D. Φ^* étant de genres un, cette courbe est d'ailleurs du sixième ordre.

Aux courbes Γ_1 correspondent des droites doubles passant par un point O et rencontrant la courbe D en six points distincts de O, puisque les courbes Γ_1 sont de genre deux. Au point O correspondent sur Φ le point commun à toutes les courbes Γ_1 et la courbe exceptionnelle Γ_0.

A la courbe $\Gamma_{11} + \gamma_1$ correspond une droite a_1 passant par O et touchant la courbe D en trois points. Les cinq autres courbes analogues du faisceau $|\Gamma_1|$ donnent lieu à des tritangentes de D passant par O.

Ainsi donc, la courbe de diramation D du plan double Φ^*, du sixième ordre, possède six tritangentes passant par un même point O. De telles courbes existent certainement, car si $f_3(x_1, x_2, x_3)$ est une forme ternaire cubique complète et $\varphi_6(x_2, x_3)$ une forme binaire du sixième degré, la courbe d'équation

$$[f_3(x_1, x_2, x_3)]^2 + \varphi_6(x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

répond à la question. Il ne semble pas cependant que l'équation de la courbe D puisse nécessairement se mettre sous la forme précédente.

6. Passons à l'examen du second cas. Il existe trois courbes canoniques de F unies pour I_3 : la courbe C_0 passe par trois des points unis A_{11}, A_{12}, A_{13} et la courbe C_2 par les trois autres points unis A_{21}, A_{22}, A_{23}. A la courbe C_0 correspond sur la surface Φ image de l'involution la courbe exceptionnelle Γ_0 de cette surface. Aux courbes C_1, C_2 correspondent sur Φ des courbes elliptiques Γ_1, Γ_2, ayant un point commun, image du groupe de l'involution I_3 commun aux courbes C_1, C_2.

Dans le système bicanonique $|2C|$ de F existe un système linéaire composé au moyen de I_3 et contenant les courbes $2C_0$, $C_1 + C_2$. A ces courbes, qui passent simplement par les six points unis de I_3, correspondent sur Φ des courbes de genre deux que nous désignerons par Γ. Le système envisagé sur F ayant le degré effectif six, le système $|\Gamma|$ a le degré deux et est donc un réseau complet.

Parmi les courbes Γ se trouve la courbe $\Gamma_1 + \Gamma_2$; les courbes Γ_1 et Γ_2 étant elliptiques, doivent former des faisceaux distincts dont la somme équivaut à $|\Gamma|$. Mais alors, les courbes C_1, C_2 engendreraient des faisceaux de courbes canoniques unies pour I_3, ce qui est absurde.

Le second cas ne peut donc se présenter.

7. Revenons au premier cas. Nous allons montrer que, tout au moins lorsque l'équation de la courbe D peut se mettre sous la forme (1), le plan double Φ^* est effectivement l'image d'une involution du troisième ordre appartenant à une surface F de genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 4$, $P_2 = 6$, ...

Envisageons en effet la surface d'équation

$$x_0^6 + 2x_0^3 f_3(x_1, x_2, x_3) - \varphi_6(x_2, x_3) = 0. \tag{2}$$

Cette surface est transformée en elle-même par l'homologie

$$\frac{x'_0}{\varepsilon x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{x_3},$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. Cette homologie engendre sur la surface (2) une involution du troisième ordre dont l'image est le plan double Φ^* ayant comme courbe de diramation la courbe (1).

Posons

$$\frac{X_0}{x_0 x_1} = \frac{X_{11}}{x_0^2} = \frac{X_{22}}{x_2^2} = \frac{X_{33}}{x_3^2} = \frac{X_{23}}{x_2 x_3} = \frac{X_{31}}{x_3 x_0} = \frac{X_{12}}{x_0 x_2},$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^3 \alpha_0 + x_1^2 \alpha_1(x_2, x_3) + x_1 \alpha_2(x_2, x_3) + \alpha_3(x_2, x_3).$$

A la surface (2) correspond la surface ayant pour équations les mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{31} \\ X_{12} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{23} & X_{33} \end{vmatrix}$$

égalés à zéro et

$$X_{11}^3 + 2[X_0^3 \alpha_0 + X_0^2 \alpha_1(X_{12}, X_{31}) + X_0 \alpha_2(X_{12}, X_{31}) + \alpha_3(X_{12}, X_{31})] \\ + \varphi'_3(X_{22}, X_{33}, X_{23}) = 0,$$

où φ'_3 est une forme cubique.

On retrouve, aux notations près, la surface et l'involution que nous avons étudiées récemment [1].

---

[1] Sur quelques involutions appartenant à la surface de Humbert généralisée. (*Loc. cit.*)

Liége, le 16 avril 1936.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.