Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences
Séance du 3 octobre 1942, nos 10-11.

GÉOMÉTRIE

Sur certaines surfaces du quatrième ordre contenant douze droites,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Les surfaces du quatrième ordre que nous considérons dans cette note ont déjà été rencontrées par M. O. Mayer (1) ; une de ces surfaces contient les directrices de trois congruences bilinéaires et les droites communes à ces congruences prises deux-à-deux. M. Mayer en a donné plusieurs générations projectives ; nous démontrons que cette surface est déterminée par les 12 droites.

Désignons d'une manière générale par a les six directrices des congruences, par b les six droites communes à ces congruences prises deux-à-deux et soit F la surface contenant ces douze droites. Nous montrons qu'il existe une transformée crémonienne F_0 de F, du quatrième ordre, contenant six droites a' et six droites b' présentant la même configuration que les droites a et b. Aux droites a, b correspondent des cubiques gauches sur la surface F_0 et aux droites a', b', des cubiques gauches sur la surface F.

Il existe deux autres surfaces du quatrième ordre, transformées crémoniennes de F, sur lesquelles il existe douze droites a, b' et douze cubiques gauches a', b pour l'une, douze droites a', b et douze cubiques gauches a, b'

(1) *Sur une surface remarquable du quatrième ordre* (C. R., avril 1924, pp. 1455-1459).

pour la seconde. Ces deux surfaces présentent également les mêmes caractères projectifs que la surface F.

Les droites de chacune des congruences linéaires découpent sur F les couples de trois involutions T_1, T_2, T_3. De même, les droites qui s'appuient sur deux droites *b* communes à deux congruences linéaires découpent sur F les couples d'une involution ; on obtient ainsi trois nouvelles involutions T'_1, T'_2, T'_3. M. Mayer avait remarqué que l'on a

$$T_1T'_1 = T_2T'_2 = T_3T'_3.$$

Les deux involutions T_i, T'_i sont permutables et le produit $T = T_iT'_i$ engendre une involution du second ordre. Nous montrons que cette involution possède huit points unis et qu'elle est par suite de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Les surfaces F et F_0 se correspondent non seulement dans une transformation birationnelle (du neuvième ordre), mais de plus sont projectives.

1. Considérons trois couples de droites a_{11} et a_{12}, a_{21} et a_{22}, a_{31} et a_{32}, ces six droites n'appartenant pas à une surface cubique et quatre quelconques d'entre elles n'appartenant pas à une même quadrique. Soient b_{11}, b_{12} les droites s'appuyant sur les couples a_{21}, a_{22} et a_{31}, a_{32} ; b_{21} et b_{22} les droites s'appuyant sur a_{31}, a_{31} et a_{11}, a_{12} ; b_{31}, b_{32} les droites s'appuyant sur a_{11}, a_{12} et a_{21}, a_{22}.

Le lieu d'un point P tel que les droites passant par ce point et s'appuyant respectivement sur a_{11} et a_{12}, a_{21} et a_{22}, a_{31} et a_{32}, soient situées dans un même plan, est une surface du quatrième ordre F passant simplement par les six droites *a* et par les six droites *b* [1]. La surface F est dépourvue de points singuliers et est par conséquent de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Les droites *a*, *b* ont sur cette surface le degré — 2.

---

[1] Voir par exemple L. GERLACHE, *Sur quelques surfaces algébriques* (MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROY. DES SCIENCES DE LIÉGE, 1930).

Le lieu d'un point P′ tel que les droites issues de ce point et s'appuyant respectivement sur les droites b_{11} et b_{12}, b_{21} et b_{22}, b_{31} et b_{32}, soient coplanaires, est une surface du quatrième ordre F′ passant par les droites b et a.

Supposons que la surface F′ puisse être distincte de F. Ces deux surfaces ont en commun, en dehors des droites a et b, une quartique gauche γ s'appuyant en deux points sur chacune des droites a et b. Observons que toute surface du quatrième ordre passant par les droites a et b contient γ et appartient donc au faisceau déterminé par F et F′.

Les surfaces cubiques passant par les droites a_{11}, a_{12}, b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32} sont en nombre ∞^3 et ne rencontrent γ en aucun point variable ; il y en a donc ∞^2 contenant cette courbe. Ceci est absurde, puisque deux surfaces cubiques auraient en commun une courbe d'ordre dix. On en conclut que les surfaces F et F′ coïncident et que, de plus, toute surface du quatrième ordre contenant les droites a et b coïncide avec F.

2. Considérons une quadrique passant par les droites a_{11}, a_{12}, b_{21}, b_{22}. Elle coupe encore la surface F suivant une quartique gauche elliptique γ_4 s'appuyant en deux points sur chacune des droites a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, mais ne rencontrant pas les droites a_{31}, a_{32}, b_{31} et b_{32}. Une quadrique passant par les droites a_{21}, a_{22}, b_{11} et b_{12} ne rencontre plus la courbe γ_4 en dehors de ces droites, par conséquent il existe une telle quadrique contenant la courbe γ_4. Les ∞^1 quadriques passant par γ_4 découpent encore sur F les quartiques d'un faisceau comprenant les courbes dégénérées $a_{11} + a_{12} + b_{21} + b_{22}$ $a_{21} + a_{22} + b_{11} + b_{12}$. On a par suite la relation fonctionnelle

$$a_{11} + a_{12} + b_{21} + b_{22} \equiv a_{21} + a_{22} + b_{11} + b_{12}.$$

On a de même

$$a_{21} + a_{22} + b_{31} + b_{32} \equiv a_{31} + a_{32} + b_{21} + b_{22},$$
$$a_{31} + a_{32} + b_{11} + b_{12} \equiv a_{11} + a_{12} + b_{31} + b_{32}.$$

3. La quadrique passant par les droites a_{21}, a_{22}, a_{11}, b_{31}, b_{32} coupe encore F suivant une cubique gauche que nous désignerons par a'_{11}. A cause de la seconde des relations qui viennent d'être établies, la cubique gauche a'_{11} appartient également à la quadrique passant par les droites a_{31}, a_{32}, a_{11}, b_{21}, b_{22}. La cubique a'_{11} s'appuie en deux points sur les droites a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, en un point sur les droites b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32} et ne rencontre pas les droites a_{12}, b_{11}, b_{12}.

Si nous représentons par $|C|$ le système des sections planes de F, nous avons

$$\begin{aligned} a'_{11} &\equiv 2C - a_{21} - a_{22} - a_{11} - b_{31} - b_{32} \\ &\equiv 2C - a_{31} - a_{32} - a_{11} - b_{21} - b_{22}. \end{aligned}$$

Nous introduirons onze autres cubiques gauches analogues, à savoir

$$\begin{aligned}
a'_{12} &\equiv 2C - a_{21} - a_{22} - a_{12} - b_{31} - b_{32} \\ &\equiv 2C - a_{31} - a_{32} - a_{12} - b_{21} - b_{22}, \\
a'_{21} &\equiv 2C - a_{31} - a_{32} - a_{21} - b_{11} - b_{12} \\ &\equiv 2C - a_{11} - a_{12} - a_{21} - b_{31} - b_{32}, \\
a'_{22} &\equiv 2C - a_{31} - a_{32} - a_{22} - b_{11} - b_{12} \\ &\equiv 2C - a_{11} - a_{12} - a_{22} - b_{31} - b_{32}, \\
a'_{31} &\equiv 2C - a_{11} - a_{12} - a_{31} - b_{21} - b_{22} \\ &\equiv 2C - a_{21} - a_{22} - a_{31} - b_{11} - b_{12}, \\
a'_{32} &\equiv 2C - a_{11} - a_{12} - a_{32} - b_{21} - b_{22} \\ &\equiv 2C - a_{21} - a_{22} - a_{32} - b_{11} - b_{12}, \\
b'_{11} &\equiv 2C - b_{21} - b_{22} - b_{11} - a_{31} - a_{32} \\ &\equiv 2C - b_{31} - b_{32} - b_{11} - a_{21} - a_{22}, \\
b'_{12} &\equiv 2C - b_{21} - b_{22} - b_{12} - a_{31} - a_{31} \\ &\equiv 2C - b_{31} - b_{34} - b_{12} - a_{21} - a_{22},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b'_{21} &\equiv 2C - b_{31} - b_{32} - b_{21} - a_{11} - a_{12} \\
&\equiv 2C - b_{11} - b_{12} - b_{21} - a_{31} - a_{32}, \\
b'_{22} &\equiv 2C - b_{31} - b_{32} - b_{22} - a_{11} - a_{12} \\
&\equiv 2C - b_{11} - b_{12} - b_{22} - a_{31} - a_{32}, \\
b'_{31} &\equiv 2C - b_{11} - b_{12} - b_{31} - a_{21} - a_{22} \\
&\equiv 2C - b_{21} - b_{22} - b_{31} - a_{11} - a_{12}, \\
b'_{32} &\equiv 2C - b_{11} - b_{12} - b_{32} - a_{21} - a_{22} \\
&\equiv 2C - b_{21} - b_{22} - b_{32} - a_{11} - a_{12}.
\end{aligned}$$

Si l'on tient compte du fait que les droites a, b sont de degré -2, on remarque que les cubiques a', b' ont une disposition analogue à celle des droites a, b. Deux cubiques a', ou deux cubiques b', ne se rencontrent pas. Une cubique a' et une cubique b' dont les premiers indices sont égaux, ne se rencontrent pas, mais si les premiers indices sont distincts, ces courbes se rencontrent en un point. En d'autres termes, on a

$$[a'_{hi}\, b'_{kj}] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h = k, \\ 1 & \text{si} \quad h \neq k, \end{cases}$$

le premier membre représentant le nombre de points communs aux courbes a'_{hi}, b'_{kj}.

Les courbes a', b' ont le degré -2.

4. Considérons les surfaces du cinquième ordre irréductibles passant par les droites a, b. De telles surfaces existent certainement. Considérons en effet l'ensemble d'une surface cubique passant par les droites a_{11}, a_{12}, b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32}, a_{21} et de la quadrique passant par les droites a_{31}, a_{32}, b_{11}, b_{12}, a_{22}. On peut former de tels ensembles de plusieurs manières et on obtient ainsi des surfaces du cinquième ordre réductibles, sans partie commune, déterminant par conséquent un système linéaire de surfaces irréductibles.

D'autre part, les surfaces du cinquième ordre sont en nombre ∞^{55} ; celles qui passent par les droites a, b sont en nombre ∞^7. Parmi celles-ci, il y en a ∞^3 formées de la surface F et d'un plan, donc il y a ∞^3 surfaces irréductibles du cinquième ordre passant par les droites *a, b*.

En dehors des droites *a, b*, ces surfaces découpent sur F les courbes

$$C_0 \equiv 5C - \Sigma a - \Sigma b.$$

Le système linéaire $|C_0|$ est de genre trois, de dimension trois et de degré quatre.

Les courbes C_0 rencontrent chacune des droites *a, b* en trois points et chacune des cubiques gauches *a', b'* en un point. Par conséquent, si nous rapportons projectivement les courbes C_0 aux plans de l'espace, il correspond à la surface F une surface F_0, du quatrième ordre, contenant douze droites *a', b'* et douze cubiques gauches *a, b*. Ces droites *a', b'* et ces cubiques gauches *a, b* présentent, sur F_0, la même configuration que les droites *a, b* et les cubiques *a', b'* sur F. Les surfaces F_0 et F présentent les mêmes caractères projectifs.

Les surfaces du cinquième ordre passant par les droites *a', b'*, découpent sur F le système linéaire

$$5C_0 - \Sigma a' - \Sigma b' \equiv C.$$

5. Les surfaces cubiques passant par les droites a_{11}, a_{12}, b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32} forment un système homaloïdal et découpent, sur F, le système linéaire

$$|C_1| = |3C - a_{11} - a_{12} - b_{21} - b_{22} - b_{31} - b_{32}|,$$

formé de sextiques de genre trois et de degré quatre.

En utilisant les relations fonctionnelles établies plus haut (nº 2), on voit que l'on a également

$$C_1 \equiv 3C - a_{21} - a_{22} - b_{31} - b_{32} - b_{11} - b_{12},$$
$$C_1 \equiv 3C - a_{31} - a_{32} - b_{11} - b_{12} - b_{21} - b_{22}.$$

En d'autres termes, les sextiques C_1 sont également découpées sur F par les surfaces cubiques passant par les droites a_{21}, a_{22}, b_{31}, b_{32}, b_{11}, b_{12} ou par les droites a_{31}, a_{32}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}.

Considérons également le système linéaire de sextiques de genre trois et de degré quatre

$$|C_2| = |3C - b_{11} - b_{12} - a_{21} - a_{22} - a_{31} - a_{32}|,$$

découpé par les surfaces cubiques passant par les droites b_{11}, b_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}.

On a également

$$C_2 \equiv 3C - b_{21} - b_{22} - a_{31} - a_{32} - a_{11} - a_{12},$$
$$C_2 \equiv 3C - b_{31} - b_{32} - a_{11} - a_{12} - a_{21} - a_{22}.$$

Observons que les courbes C_1 rencontrent les droites a chacune en un point, chacune des droites b en trois points, chacune des cubiques gauches a' en trois points et chacune des cubiques gauches b' en un point.

De même, les courbes C_2 rencontrent chacune des droites a en trois points, chacune des droites b en un point, chacune des courbes a' en un point et chacune des courbes b' en trois points.

6. Rapportons projectivement les courbes C_1 aux plans de l'espace ; à la surface F correspond une surface du quatrième ordre F_1. Sur cette surface, aux droites a correspondent des droites, aux cubiques gauches b' correspondent également des droites. Par contre, aux droites b et aux cubiques gauches a' correspondent des cubiques gauches.

On vérifie aisément que l'on a

$$[a_{hi}\, b'_{kj}] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h = k, \\ 1 & \text{si} \quad h \neq k. \end{cases}$$

En d'autres termes, sur la surface F_1, les droites a et b' forment exactement la même configuration que les droites a et b sur la surface F.

On a

$$3C_1 - a_{11} - a_{12} - b'_{21} - b'_{22} - b'_{31} - b'_{32} \equiv C,$$

de sorte qu'aux courbes C de F correspondent sur F_1 les courbes découpées par les surfaces cubiques passant par les droites a_{11}, a_{12}, b'_{21}, b'_{22}, b'_{31}, b'_{32} de cette surface.

De même, en rapportant projectivement les courbes C_2 aux plans de l'espace, on obtient comme transformée de F une surface F_2, du quatrième ordre, sur laquelle aux droites b et aux courbes a' correspondent des droites, aux droites a et aux courbes b' des cubiques gauches.

On a

$$[a'_{hi}\, b'_{kj}] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h = k, \\ 1 & \text{si} \quad h \neq k, \end{cases}$$

de sorte que les droites a' et b forment sur la surface F_2 une configuration analogue à celle des droites a et b sur la surface F.

Aux courbes C correspondent sur F_2 les courbes découpées par les surfaces cubiques passant par les droites b_{11}, b_{12}, a'_{21}, a'_{22}, a'_{31}, a'_{32} de cette surface, car on a

$$3C_2 - b_{11} - b_{12} - a'_{21} - a'_{22} - a'_{31} - a'_{32} \equiv C.$$

7. Nous venons d'obtenir quatre surfaces F, F_0, F_1, F_2 deux-à-deux birationnellement identiques. De plus, les surfaces F, F_1, F_2 sont deux-à-deux crémoniennement identiques.

Partons de la surface F_0. Nous avons déjà remarqué que les surfaces du cinquième ordre passant par les droites a', b', découpaient sur F_0 les courbes homologues des courbes C ; par conséquent, en rapportant projectivement ces surfaces aux plans de l'espace, nous obtiendrons la surface F (ou tout au moins une surface projectivement identique à F).

Considérons, sur la surface F_0, les courbes découpées par les surfaces cubiques passant par les droites a'_{11}, a'_{12}, b'_{11}, b'_{22}, b'_{31}, b'_{32}. On a

$$3C_0 - a'_{11} - a'_{12} - b'_{21} - b'_{22} - b'_{31} - b'_{32} \equiv C_2,$$

par conséquent, en rapportant projectivement ces surfaces cubiques aux plans de l'espace, nous obtiendrons une surface projectivement identique à F_2.

De même, on a

$$3C_0 - b'_{11} - b'_{12} - a'_{21} - a'_{22} - a'_{31} - a'_{32} \equiv C_1,$$

de sorte qu'en rapportant projectivement aux plans de l'espace les surfaces cubiques passant par les droites b'_{11}, b'_{12}, a'_{21}, a'_{22}, a'_{31}, a'_{32}, on transforme F_0 en une surface projectivement identique à F_1.

Aux courbes C_0 de F_0 correspondent sur F_1 les courbes

$$3C'_1 - b'_{11} - b'_{12} - a_{21} - a_{22} - a_{31} - a_{32} \equiv C_0,$$

découpées par les surfaces cubiques passant par les droites b'_{11}, b'_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}.

On en conclut que les surfaces F, F_0 sont crémoniennement identiques. Aux plans de l'espace de F correspondent dans l'espace contenant F_0 des surfaces du neuvième ordre passant trois fois par chacune des droites a'_{21}, a'_{22}, a'_{31}, a'_{32}, b'_{11}, b'_{12}, une fois par les droites b'_{21}, b'_{22}, b'_{31}, b'_{32} et par les cubiques gauches a_{11}, a_{12}. On a bien

$$9C_0 - a_{11} - a_{12} - 3(a'_{21} + a'_{22} + a'_{31} + a'_{32} + b'_{11} + b'_{22}) \\ - (b'_{21} + b'_{22} + b'_{31} + b'_{32}) \equiv 5C_0 - \Sigma a' - \Sigma b'.$$

8. Sur la surface F_1, on a

$$5C_1 - \Sigma a' - \Sigma b \equiv C_2$$

et sur la surface F_2,

$$5C_2 - \Sigma a - \Sigma b' \equiv C_1.$$

On peut donc passer de F_1 à F_2 en rapportant projectivement aux plans de l'espace les surfaces du cinquième ordre passant par les droites a, b'. On passe de F_2 à F_1 en rapportant projectivement aux plans de l'espace les surfaces du cinquième ordre passant par les droites a' et b.

9. Entre les droites a, b et les courbes a', b', on a des relations analogues à celles qui ont été obtenues plus haut (n° 2), par exemple

$$a_{11} + a_{12} + b'_{21} + b'_{22} \equiv a_{21} + a_{22} + b'_{11} + b'_{12},$$
$$a'_{11} + a'_{12} + b_{21} + b_{22} \equiv a'_{21} + a'_{22} + b_{11} + b_{12},$$
$$a'_{11} + a'_{12} + b'_{21} + b'_{22} \equiv a'_{21} + a'_{22} + b'_{11} + b_{12}.$$

10. A un point P de la surface **F** faisons correspondre le second point de percée avec F de la droite passant par P et s'appuyant sur a_{i1}, a_{i2}. Nous définissons ainsi une transformation birationnelle T_i de F en soi. En considérant les droites b_{i1}, b_{i2} au lieu des droites a_{i1}, a_{i2}, nous définissons de même une seconde transformation analogue T'_i.

Commençons par étudier la transformation T_1. Désignons par Γ, α_{ik}, β_{ik} les courbes que T_1 fait correspondre respectivement aux courbes C, a_{ik}, b_{ik}.

Les droites s'appuyant sur a_{11}, a_{12} et sur une section plane C de F forment une réglée du sixième ordre passant trois fois par a_{11}, a_{12} et contenant comme génératrices les droites b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32}. Elle coupe encore F suivant la courbe Γ homologue de C et on a donc

$$\Gamma \equiv 5C - 3(a_{11} + a_{12}) - (b_{21} + b_{22} + b_{31} + b_{32}).$$

Les droites s'appuyant sur a_{11}, a_{12} et touchant F en un point de a_{11} forment une réglée du quatrième ordre passant trois fois par a_{12} et une fois par a_{11}. On a donc

$$\alpha_{11} \equiv 4C - 2a_{11} - 3a_{12} - (b_{21} + b_{22} + b_{31} + b_{32}).$$

De même,

$$\alpha_{12} \equiv 4C - 3a_{11} - 2a_{12} - (b_{21} + b_{22} + b_{31} + b_{32}).$$

On a évidemment

$$\alpha_{21} \equiv a'_{21}, \quad \alpha_{22} \equiv a'_{22}, \quad \alpha_{31} \equiv a'_{31}, \quad \alpha_{32} \equiv a'_{32}.$$

ainsi que

$$\beta_{21} \equiv b_{21}, \quad \beta_{22} \equiv b_{22}, \quad \beta_{31} \equiv b_{31}, \quad \beta_{32} \equiv b_{32}.$$

On trouve enfin sans difficulté

$$\beta_{11} \equiv 2C - a_{11} - a_{12} - b_{11}, \quad \beta_{12} \equiv 2C - a_{11} - a_{12} - b_{12}.$$

Les droites s'appuyant sur a_{11}, a_{12} et touchant la surface F forment une réglée du huitième ordre passant quatre fois par a_{11}, a_{12}, ayant comme génératrices doubles les droites b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32} et circonscrite à la surface F le long de la courbe unie D_1 de la transformation T_1. On a donc

$$8C \equiv 4(a_{11} + a_{12}) + 2(b_{21} + b_{22} + b_{31} + b_{32}) + 2D_1.$$

La division sur une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) étant univoque (Severi), on a

$$D_1 \equiv 4C - 2(a_{11} + a_{12}) - (b_{21} + b_{22} + b_{31} + b_{32}).$$

11. En désignant par Γ', α'_{ik}, β'_{ik} les courbes que T'_1 fait correspondre aux courbes C, a_{ik}, C_{ik}, on trouve de même

$$\Gamma' \equiv 5C - (a_{21} + a_{22} + a_{31} + a_{32}) - 3(b_{11} + b_{12}),$$
$$\alpha'_{11} \equiv 2C - a_{11} - b_{11} - b_{12}, \quad \alpha'_{12} \equiv 2C - a_{12} - b_{11} - b_{12},$$
$$\alpha'_{21} \equiv a_{21}, \quad \alpha'_{22} \equiv a_{22}, \quad \alpha'_{31} \equiv a_{31}, \quad \alpha'_{32} \equiv a_{32},$$
$$\beta'_{11} \equiv 4C - (a_{21} + a_{22} + a_{31} + a_{32}) - 2b_{11} - 3b_{12},$$
$$\beta'_{12} \equiv 4C - (a_{21} + a_{22} + a_{31} + a_{32}) - 3b_{11} - 2b_{12},$$
$$\beta'_{21} \equiv b'_{21}, \quad \beta'_{22} \equiv b'_{22}, \quad \beta'_{31} \equiv b'_{31}, \quad \beta'_{32} \equiv b'_{32}.$$

La courbe unie D'_1 de l'involution engendrée par T'_1 est donnée par

$$D'_1 \equiv 4C - (a_{21} + a_{22} + a_{31} + a_{32}) - 2(b_{11} + b_{12}).$$

En vertu des relations d'équivalence établies plus haut (nº 2), on voit que D_1 et D'_1 appartiennent au même système linéaire $|D|$. On calcule facilement le genre de ce système ; il est égal à cinq et son degré est donc égal à huit. D_1 et D'_1 ont donc huit points communs.

12. Formons le produit $T_1T'_1$. Cette transformation fait correspondre aux sections planes C de F les courbes

$$5C - \Sigma a - \Sigma b \equiv C_0.$$

Aux droites a_{ik}, b_{ik}, la transformation fait correspondre les cubiques gauches a'_{ik}, b'_{ik}.

On vérifie aisément que le produit $T'_1\, T_1$ fait correspondre également aux courbes C, a_{ik}, b_{ik} les mêmes courbes C_0, a'_{ik}, b'_{ik}. On en conclut que les transformations T_1, T_1 sont permutables. La transformation

$$T = T_1 T'_1 = T'_1 T_1$$

est donc involutive.

Les points unis de l'involution engendrée par T sont donnés par les couples communs aux involutions engendrées par T_1, T'_1 et par les points communs aux courbes unies de ces involutions. Les droites s'appuyant sur a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12} ne rencontrent plus la surface F en dehors de leurs points d'appui sur ces droites, par conséquent les seuls points unis de T sont les huit points communs aux courbes D_1, D'_1. Il en résulte que l'involution engendrée par T est de genres un ($p_a = P_4 = 1$) [1]. De plus, les surfaces F et F_0 sont projectivement identiques.

13. La manière dont opère la transformation T sur les courbes tracées sur F montre que l'on a également

$$T = T_2 T'_2 = T_3 T'_3.$$

On peut d'ailleurs le vérifier sans peine. Cette propriété avait du reste été remarquée par M. Mayer (loc. cit.).

Les courbes unies D_2, D'_2, D_3, D'_3 des transformations T_2, T'_2, T_3, T'_3 passent par les huit points communs aux courbes D_1, D'_1. On remarquera que les courbes D_1 et D_2, par exemple, se rencontrent en douze points.

Il y aurait lieu de compléter l'étude de la surface F par l'examen des transformations $T_2 T_3$, $T'_2 T'_3$, ... ; ce sera l'objet d'une seconde note.

Liége, le 31 août 1942.

---

(1) Voir notre note *Sur les involutions de genres un appartenant à une surface de genres un* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1913, pp. 310-328). Voir aussi notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).