Variétés algébriques à sections hyperplanes canoniques

Lucien Godeaux

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Variétés algébriques à sections hyperplanes canoniques

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Dans cette courte note, après avoir établi deux résultats connus, nous construisons une famille de variétés algébriques dont les variétés canoniques sont les sections hyperplanes.

1. Soit V^n_{n-2} une variété algébrique d'ordre $n \geqslant 5$ dans un espace S_{n-1} à $n-1$ dimensions, privée de singularités.

La section de V^n_{n-2} par un plan est une courbe d'ordre n dont le système adjoint est découpé par les hypersurfaces d'ordre $n-3$. La section de V^n_{n-2} par un espace à trois dimensions est une surface V^n_2 dont le système canonique est découpé par les hypersurfaces d'ordre $n-4$.

Plus généralement, la section de V^n_{n-2} par un espace S_k à k dimensions est une variété V^n_{k-1} dont le système canonique est découpé par les hypersurfaces d'ordre $n-k-1$. Par suite, le système canonique de V^n_{n-2} est découpé par les hypersurfaces d'ordre $n-n=0$, c'est-à-dire que la variété V^n_{n-2} possède une variété canonique d'ordre zéro.

Tout système linéaire de variétés à $n-3$ dimensions tracées sur V^n_{n-2} est son propre adjoint.

2. Considérons maintenant dans un espace S_n à n dimensions une variété V^n_{n-1} privée de singularités. La section de cette variété par une hypersurface V^m_{n-1} est une variété (V^n_{n-1}, V^m_{n-1}) d'ordre nm que nous supposerons privée de singularités.

Coupons cette variété par un hyperplan ξ. Sur la section de V_{n-1}^n par ξ, tout système linéaire de variétés à $n - 3$ dimensions est son propre adjoint, donc l'adjoint de la section de la variété (V_{n-1}^n, V_{n-1}^m) par ξ est découpé par les hypersurfaces d'ordre m de S_{n-1}. On en conclut que les variétés canoniques de $(V_{n-1}^n, V_{n-1}^m\})$ sont découpées par les hypersurfaces d'ordre $m - 1$ de S_n.

En particulier, si $m = 2$, le système canonique de la variété (V_{n-1}^m, V_{n-1}^n) est découpé par les hyperplans.

3. Considérons dans S_n l'homographie H de période n et d'équations

$$x'_0 : x'_1 : \cdots : x'_n = x_0 : \varepsilon x_1 : \cdots : \varepsilon^{n-1} x_n,$$

où ε est une racine primitive d'ordre n de l'unité.

Nous supposerons dorénavant que n est premier, impair et nous poserons $n = 2\nu + 1$.

Les hypersurfaces d'ordre n de S_n transformées en elles-mêmes par H forment n systèmes linéaires dont l'un est dépourvu de points-base. Soit r la dimension de ce système. En rapportant projectivement ces hypersurfaces aux hyperplans d'un espace S_r à r dimensions, on obtient une variété algébrique W dont les points correspondent aux groupes de n points de l'involution I engendrée par H dans S_n. La variété W, à n dimensions, est d'ordre n^{n-1} et ne passe par aucun des points de diramation de la correspondancc (l,n) existant cntrc W ct S_n. Elle est dépourvue de singularités.

Soit $f(x_0,x_1,...,x_n) = 0$ l'équation d'une hypersurface d'ordre m de S_n. En élevant les deux membres de cette équation à la n-ième puissance, on obtient une équation que l'on peut exprimer au moyen des coordonnées des points de S_r. Cette hypersurface de S_r coupe W suivant une variété d'ordre mn^{n-1}. Faisons varier d'une manière continue l'hypersurface $f = 0$ en la faisant tendre vers une hypersurface transformée en soi par H. La variété correspondante sur W tend soit vers une hypersurface d'ordre m de S_r, soit vers une variété qui a, avec W, un contact d'ordre $n - 1$ en chaque point d'intersection.

Nous désignerons par Ω cette variété. Notons que l'hypersurface qui la découpe sur W passe par des points de diramation de l'involution I, mais comme ce n'est pas le cas pour W, ce n'est pas non plus le cas pour Ω.

4. Nous avons démontré [1] que dans le système canonique de la variété (V^m_{n-1}, V^2_{n-1}), il y a n systèmes linéaires appartenant à l'involution I. L'un est le transformé du système canonique de la variété Ω et puisque n est impair, c'est celui qui a la plus grande dimension. Les autres ont des dimensions égales.

Observons que l'on a

$$(x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}) \cdot (x_1^{\alpha_{n-1}} \cdot x_2^{\alpha_{m-2}} \cdot \dots \cdot x_{n-1}^{\alpha_1}) = 1 = \varepsilon^n$$

et que, par conséquent, si nous désignons par $\varphi_k = 0$ l'équation d'une hypersurface d'ordre $m - 1$ de S_n telle que lorsque l'on effectue H, φ_k se reproduit multiplié par ε^k, les systèmes donnés par $k > 0$ et $n - k = 0$ ont la même dimension.

On en conclut que les systèmes donnés par $k > 0$ ont tous la même dimension et que le système donné par $k = 0$ a la plus grande dimension.

Nous obtenons donc les théorèmes suivants:

I. *Les variétés canoniques de la section de* W *par une hypersurface de* S_r *d'ordre m sont découpées par les hypersurfaces d'ordre* $m - 1$.

II. *Si une hypersurface d'ordre mn de* S_r *a un contact d'ordre* $n - 1$ *avec* W *en tout point d,intersection, les variétés canoniques de la variété de contact sont découpées par les hypersurfaces d'ordre* $m - 1$.

En particulier,

I'. *Les variétés canoniques de la section de* W *par une hyperquadrique de* S_r *sont découpées par les hyperplans.*

II'. *Les variétés canoniques de la variété le long de laquelle une hyperquadrique a un contact d'ordre* $n - 1$ *avec* W, *sont découpées par les hyperplans.*

Liège, le 25 juin 1974.

---

[1] *Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1938, pp. 291-297).