Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 7 novembre 1942, nos 10-11.

GÉOMÉTRIE

Sur certaines surfaces du quatrième ordre contenant douze droites,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Seconde note)

Dans notre première note (1), nous avons considéré la surface F du quatrième ordre et de de genres un ($p_a = P_4 = 1$), contenant trois couples de droites a_{11} et a_{12}, a_{21} et a_{22}, a_{31} et a_{32}, deux-à-deux gauches et les trois couples de droites b_{11} et b_{12} s'appuyant sur a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32} ; b_{21} et b_{22}, s'appuyant sur a_{31}, a_{32}, a_{11}, a_{12} ; b_{31} et b_{32}, s'appuyant sur a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}. Nous avons appelé T_i la transformation involutive de F en soi dont les couples homologues sont situés sur les droites s'appuyant sur a_{i1}, a_{i2}, et T'_i la transformation analogue obtenue en partant des droites b_{i1}, b_{i2}. Nous avons ensuite considéré la transformation (involutive)

$$T_1T'_1 = T_2T'_2 = T_3T'_3.$$

Dans cette seconde note, nous considérons les transformations T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2. Ces transformations ne sont pas périodiques et forment un groupe infini. Chacune de ces transformations est déterminée sur F par une transformation birationnelle de l'espace. Considérons par exemple la transformation $T_2T_3 = \theta_1$. Aux plans de l'espace, θ_1 fait correspondre les surfaces du neuvième ordre passant trois fois par les droites a_{21},

(1) Voir Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1942, pp. 999.

a_{22}, b_{21}, b_{22}, une fois par les droites a_{31}, a_{32}, b_{31}, b_{32}, trois fois par les droites s'appuyant sur a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22} et une fois par les deux cubiques gauches ayant les quatre droites précédentes comme bisécantes, s'appuyant en outre en un point sur les droites a_{31}, a_{32}, b_{31}, b_{32}. La transformation inverse θ_1^{-1} s'obtient en permutant les rôles des droites a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22} et a_{31}, a_{32}, b_{31}, b_{32}.

1. Désignons par Γ, α_{ik}, β_{ik} les courbes que la transformation T_2 fait correspondre aux sections planes C de F et aux droites a_{ik}, b_{ik}. En posant pour abréger

$$A_1 = a_{11} + a_{12}, \quad A_2 = a_{21} + a_{22}, \quad A_3 = a_{31} + a_{32},$$
$$B_1 = b_{11} + b_{12}, \quad B_2 = b_{21} + b_{22}, \quad B_3 = b_{31} + b_{32},$$

nous avons

$$\Gamma \equiv 5C - 3A_2 - B_3 - B_1,$$
$$\alpha_{11} \equiv 2C - A_2 - B_3 - a_{11}, \qquad \alpha_{12} \equiv 2C - A_2 - B_3 - a_{12},$$
$$\alpha_{21} \equiv 4C - 2A_2 - B_3 - B_1 - a_{22}, \qquad \alpha_{22} \equiv 4C - 2A_2 - B_3 - B_1 - a_{12},$$
$$\alpha_{31} \equiv 2C - A_1 - B_2 - a_{31}, \qquad \alpha_{32} \equiv 2C - A_1 - B_2 - a_{32},$$
$$\beta_{11} \equiv b_{11}, \quad \beta_{12} \equiv b_{12}, \qquad \beta_{31} \equiv b_{31}, \quad \beta_{32} \equiv b_{32},$$
$$\beta_{21} \equiv 2C - A_2 - b_{21}, \qquad \beta_{22} \equiv 2C - A_2 - b_{22}.$$

La transformation T_3 donne de même, avec les mêmes notations,

$$\Gamma \equiv 5C - 3A_3 - B_1 - B_2,$$
$$\alpha_{11} \equiv 2C - A_2 - B_3 - a_{11}, \qquad \alpha_{12} \equiv 2C - A_2 - B_3 - a_{12},$$
$$\alpha_{21} \equiv 2C - A_3 - B_1 - a_{21}, \qquad \alpha_{22} \equiv 2C - A_3 - B_1 - a_{22},$$
$$\alpha_{31} \equiv 4C - 2A_3 - B_1 - B_2 - \alpha_{32},$$
$$\alpha_{32} \equiv 4C - 2A_3 - B_1 - B_2 - a_{31},$$
$$\beta_{11} \equiv b_{11}, \quad \beta_{12} \equiv b_{12}, \qquad \beta_{21} \equiv b_{21}, \quad \beta_{22} \equiv b_{22},$$
$$\beta_{31} \equiv 2C - A_3 - b_{31}, \qquad \beta_{32} \equiv 2C - A_3 - b_{32}.$$

2. Formons la transformation $T_2 T_3 = \theta_1$ et appelons encore Γ, α_{ik}, β_{ik} les courbes qu'elle fait correspondre à C, a_{ik}, b_{ik}. Nous avons

$$\Gamma \equiv 9C - 3A_2 - 3B_2 - A_3 - B_3,$$

$$\alpha_{11} \equiv a_{11}, \alpha_{12} \equiv a_{12}, \qquad \beta_{11} \equiv b_{11}, \beta_{12} \equiv b_{12},$$

$$\alpha_{21} \equiv 2C - B_2 - a_{21}, \qquad \alpha_{22} \equiv 2C - B_2 - a_{22},$$

$$\alpha_{31} \equiv 6C - 3A_2 - B_2 - 2B_3 + a_{32},$$

$$\alpha_{32} \equiv 6C - 3A_2 - B_2 - 2B_3 + a_{31},$$

$$\beta_{21} \equiv 2C - A_2 - b_{21}, \qquad \beta_{22} \equiv 2C - A_2 - b_{22},$$

$$\beta_{31} \equiv 6C - 3A_2 - B_2 - B_3 - b_{31},$$

$$\beta_{32} \equiv 6C - 3A_2 - B_2 - B_3 - b_{32}.$$

Aux sections planes C de la surface F, θ_1 fait donc correspondre les sections Γ de F par les surfaces du neuvième ordre ayant un contact du second ordre avec F le long des droites a_{31}, a_{22}, b_{21}, b_{22} et passant simplement par les droites a_{31}, a_{32}, b_{31}, b_{32}. Parmi ces surfaces, se trouvent les surfaces Φ_1 du neuvième ordre passant trois fois par les droites a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22} et une fois par les droites a_{31}, a_{32}, b_{31}, b_{32}, si elles existent.

Rapportons projectivement aux plans de l'espace les surfaces cubiques passant par les droites a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22}. Aux droites a_{31}, a_{32}, b_{31}, b_{32} correspondent respectivement quatre droites $\bar{a}_{31}$, $\bar{a}_{32}$, $\bar{b}_{31}$, $\bar{b}_{32}$. Considérons les surfaces cubiques $\bar{\Phi}_1$ passant par ces quatre droites ; elles contiennent les droites s'appuyant sur $\bar{a}_{31}$, $\bar{a}_{32}$, $\bar{b}_{31}$, $\bar{b}_{32}$ et forment un système homaloïdal. A ces surfaces $\bar{\Phi}_1$ correspondent dans l'espace primitif des surfaces du neuvième ordre, formant un système homaloïdal, passant trois fois par les droites a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22} et par les deux droites s'appuyant sur ces droites, une fois par les droites a_{31}, a_{32}, b_{31}, b_{32} et par les deux cubiques gauches ayant pour bisécantes a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22}, s'appuyant en un point sur a_{31}, a_{32}, b_{31}, b_{32}. Ce sont précisément les surfaces Φ_1, qui forment donc un système homaloïdal.

Le système $|\Gamma|$ ayant, comme le système $|C|$, la dimension trois, est complètement découpé par les surfaces du système homaloïdal $|\Phi_1|$.

3. La transformation

$$\theta_1^{-1} = (T_2T_3)^{-1} = T_3T_2$$

fait correspondre aux sections planes C de F les courbes

$$9C - A_2 - B_2 - 3A_3 - 3B_3.$$

Ces courbes sont découpées sur la surface F par les surfaces du neuvième ordre Φ'_1 passant trois fois par les droites a_{31}, a_{32}, b_{31}, b_{32} et une fois par les droites a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22}. Les surfaces Φ'_1 forment également un système homaloïdal $|\Phi'_1|$ analogue au système homaloïdal $|\Phi_1|$.

4. Considérons sur la surface F le système linéaire

$$|G| = |4C - A_2 - B_2 - A_3 - B_3|.$$

Les courbes G sont elliptiques et $|G|$ est un faisceau de degré zéro.

Les surfaces du quatrième ordre passant par les droites a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32} forment un réseau comprenant la surface F. Les autres surfaces de ce réseau découpent donc sur F les courbes G, dont l'existence est ainsi établie.

On vérifie sans peine que les courbes G sont transformées en elles-mêmes par les transformations T_2, T_3 et par conséquent par θ_1.

Sur une courbe G, T_2 et T_3 déterminent chacune une involution du second ordre ayant quatre points unis. En effet, la courbe

$$D_2 \equiv 4C - 2A_2 - B_3 - B_1,$$

unie pour la transformation T_2 par exemple, est rencontrée en quatre points par les courbes G. Il en résulte que sur une courbe G, θ_1 détermine une transformation de première espèce.

Au système $|C|$ des sections planes de F, θ_1^n fait correspondre le système

$$|C_n| = |(8n^2 + 1)C - n(2n + 1)(A_2 + B_2) - n(2n - 1)(A_3 + B_3)|.$$

Si la transformation θ_1 était cyclique, le système $|C_n|$, pour une certaine valeur de n, coïnciderait avec le système $|C|$. Cette circonstance ne se présentant pas pour une valeur entière de n différente de zéro, la transformation θ_1 n'est pas périodique.

Observons que les droites a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12} sont unies pour θ_1.

5. Nous avons

$$T_2T'_2 = T_3T'_3$$

et par conséquent

$$\theta_1 = T_2T_3 = T'_2T'_3.$$

On obtient donc également la transformation θ_1 en partant de T'_2, T'_3 au lieu de T_2, T_3.

6. Considérons, outre θ_1, les transformations

$$\theta_2 = T_3T_1, \qquad \theta_3 = T_1T_2.$$

On a

$$\theta_2\theta_3 = T_3T_1T_1T_2 = T_3T_2 = \theta_1^{-1}.$$

De même

$$\theta_3\theta_1 = \theta_2^{-1}, \qquad \theta_1\theta_2 = \theta_3^{-1}.$$

D'ailleurs, on a évidemment

$$\theta_1\theta_2\theta_3 = 1.$$

Il nous reste à considérer les transformations telles que $T_1T_2T_3$. On vérifie aisément, par des raisonnements analogues aux précédents, que cette transformation n'est pas périodique.

Liége, le 4 octobre 1942.