EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
Séance du 15 décembre 1938, n° 12.

Sur les variétés de Segre représentant les couples de points de deux espaces à n dimensions,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

La section d'une quadrique, variété de Segre représentant les couples de points de deux droites, par une seconde quadrique est une courbe elliptique dont la série canonique est donc d'ordre zéro. La section de la variété de Segre V_4^6, de S_8, représentant les couples de points de deux plans, par une hypersurface cubique est une variété à trois dimensions dont les surfaces canonique et pluricanoniques ont l'ordre zéro (1). Nous nous proposons de montrer que la section de la variété de Segre V_{2n}, représentant les couples de points de deux espaces linéaires S_n à n dimensions, par une hypersurface d'ordre $n+1$ de l'espace linéaire à $n(n+2)$ dimensions contenant la variété est une variété dont les variétés canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro.

1. Considérons deux espaces linéaires S'_n S''_n, à n dimensions et la variété de Segre représentant les couples de points de ces espaces (2). C'est une variété à $2n$ dimensions, d'ordre $N=(2n)!:(n!)^2$, appartenant à un espace linéaire à $r=n(n+2)$ dimensions, S_r. Nous la représenterons par la notation (S'_n, S'').

Si S'_{n-1} est un hyperplan de S'_n, la variété de Segre représentant les couples de points de S'_{n-1}, S''_n appartient à (S'_n, S''_n); nous la représenterons par (S'_{n-1}, S''_n). De même, nous représenterons par (S'_n, S''_{n-1}) la variété de Segre représentant les couples de points de l'espace S'_n et d'un hyperplan S''_{n-1} de S''_n.

Les sections hyperplanes de la variété (S'_n, S''_n) representent les réciprocités entre les espaces S'_n, S''_n. Si en particulier nous considérons une réciprocité singulière d'espèce n, la section hyperplane correspondante de (S'_n, S''_n) est formée de deux variétés (S'_{n-1}, S''_n), (S'_n, S''_{n-1}) Le système des sections hyperplanes de (S'_n, S''_n) peut donc être représenté par

$$|(S'_{n-1}, S''_n)+(S'_n, S''_{n-1})|.$$

(1) Voir notre note : Sur une surface canonique appartenant à la variété de Segre représentant les couples de points de deux plans (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1936, pp. 1223-1225).

(2) C. SEGRE, Sulle varietà che reppresentano le coppie di punti di due piani o spazi (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1891, pp. 192-204).

Nous aurons à considérer les sections d'une variété de Segre par les hypersurfaces d'ordre m; nous représenterons ces sections par

$$(S'_n, S''_n)_m, (S'_{n-1}, S''_n)_m, (S'_n, S''_{n-1})_m.$$

2. Supposons que les variétés canonique et pluricanoniques de la variété $(S'_{n-1}, S''_{n-1})_n$ soient d'ordre zéro. Tout système linéaire tracé sur cette variété est son propre adjoint; en particulier, les hypersurfaces d'ordre $n+1$ découpent, sur la variété, un système linéaire qui est son propre adjoint. Si nous désignons par Φ la variété intersection de $(S'_{n-1}, S''_{n-1})_n$ et d'une hypersurface d'ordre $n+1$, le système canonique de cette variété est découpé par les hypersurfaces d'ordre $n+1$.

Considérons maintenant la variété $(S'_{n-1}, S''_{n-1})_{n+1}$ et le système linéaire $|\Phi|$ découpé sur cette variété par les hypersurfaces d'ordre n. Le système adjoint $|\Phi'|$ au système $|\Phi|$ est découpé sur $(S'_{n-1}, S''_{n-1})_{n+1}$ par les hypersurfaces d'ordre $n+1$. Il en résulte que le système canonique de cette variété est celui des sections hyperplanes.

3. Considérons une variété $(S'_{n-1}, S''_n)_{n+1}$. Sur cette variété, les variétés $(S'_{n-1}, S''_{n-1})_{n+1}$ forment un système linéaire de dimension n. Le système adjoint à ce système est celui des sections hyperplanes de $(S'_{n-1}, S''_n)_{n+1}$.

Le système des sections hyperplanes de la variété $(S'_{n-1}, S''_n)_{n+1}$ est donné par

$$|(S'_{n-2}, S''_n)_{n+1} + (S'_{n-1}, S''_{n-1})_{n+1}|;$$

on a donc

$$|(S'_{n-1}, S''_{n-1})'_{n+1} - (S'_{n-1}, S''_{n-1})_{n-1}| = |(S'_{n-2}, S''_n)_{n+1}|.$$

Les variétés canoniques de la variété $(S'_{n-1}, S''_n)_{n+1}$ sont donc les variétés qui représentent les couples de points d'un hyperplan de S'_{n-1} et de S''_n, situées sur l'hypersurface d'ordre $n+1$ contenant la variété donnée

4. Considérons enfin une variété $(S'_n, S''_n)_{n+1}$ Sur cette variété, les variétés $(S'_{n-1}, S''_n)_{n+1}$ forment un système linéaire de dimension n, dont les variétés caractéristiques sont des variétés $(S'_{n-2}, S''_n)_{n+1}$. Ces variétés caractéristiques sont précisément les variétés canoniques des variétés $(S'_{n-1}, S''_n)_{n+1}$; donc le système linéaire

$$|(S'_{n-1}, S''_n)_{n+1}|$$

est son propre adjoint. Il en résulte que la variété canonique de $(S'_n, S''_n)_{n+1}$ est d'ordre zéro. Il en est de même des variétés pluri canoniques.

Le système linéaire

$$|(S'_n, S''_{n-1})_{n+1}|$$

est également son propre adjoint.

Nous voyons donc que si l'on admet que la variété $(S'_{n-1}, S''_{n-1})_n$ a des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro, la même propriété a lieu pour les variétés $(S'_n, S''_n)_{n+1}$. Or, la propriété est vraie pour les variétés $(S'_1, S''_1)_2$, $(S'_2, S''_2)_3$; donc elle est vraie pour toute valeur de n.

L'intersection de la variété de Segre qui représente dans un espace à n(n + 2) *dimensions les couples de points de deux espaces à* n *dimensions, avec une hypersurface d'ordre* n + 1, *est une variété à* 2n — 1 *dimensions dont les variétés canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro*

La variété $(S'_n, S''_n)_{n+1}$ a l'ordre $N(n+1)$; elle a $2n-1$ dimensions.

Deux variétés $(S'_{n-1}, S''_n)_{n+1}$, $(S'_n, S''_{n-1})_{n+1}$ ont en commun une variété $(S'_{n-1}, S''_{n-1})_{n+1}$ sur laquelle le système canonique est découpé par les hyperplans, comme on l'a vu plus haut.

5. On pourrait obtenir le théorème précédent de la manière suivante : En projetant la variété (S'_n, S''_n) d'une de ses variétés (S'_{n-1}, S''_{n-1}) sur un espace S_{2n}, on obtient une représentation biunivoque de la variété sur cet espace. Aux sections hyperplanes de (S'_n, S''_n) correspondent des hyperquadriques passant par des espaces gauches r_1, r_2, à $n-1$ dimensions. A la variété $(S'_n, S''_n)_{n+1}$ correspond dans S_{2n} une hypersurface d'ordre $2(n+1)$ passant $n+1$ fois par les espaces r_1, r_2. Cette hypersurface a comme adjointe l'hyperplan déterminé par les espaces gauches r_1, r_2.

Mais ce procédé suppose l'extention à l'espace S_{2n} de propriétés des adjointes établies seulement dans les espaces à deux, trois et quatre dimensions.

Liége, le 15 décembre 1938.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)