EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége.*
Séance du 20 mai 1943. — N° 5.

Remarque sur une involution du second ordre appartenant à une surface du sixième ordre,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Nous considérons dans cette note l'involution du second ordre engendrée par une homologie harmonique sur une surface du sixième ordre ayant une cubique plane double située dans le plan de l'homologie. Cette involution ne possède qu'un nombre fini de points unis, qui sont les douze points-pinces de la surface situés sur la cubique double. Nous construisons deux modèles projectifs de la surface image de cette involution. L'un est la section, dans un espace S_6, du cône projetant d'un point une surface de Veronese par une hypersurface cubique; l'autre est une surface du sixième ordre possédant un point triple et une cubique plane double.

Ces deux dernières surfaces contiennent comme cas particulier les surfaces qui représentent les couples de points d'une courbe de genre trois, chaque point d'une surface représentant deux couples de points formant un groupe canonique de la courbe. Ces surfaces ont été considérées par G. Humbert [1].

1. Soit F une surface du sixième ordre possédant une cubique plane double γ d'équations

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0, x_4 = 0$$

et transformée en elle-même par l'homologie harmonique H d'équations

$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{x_3'}{x_3} = \frac{x_4'}{-x_4}.$$

Son équation est de la forme

$$x_4^6 \alpha_0 + x_4^4 \alpha_2(x_1, x_2, x_3) + x_4^2 \alpha_4(x_1, x_2, x_3) + [f(x_1, x_2, x_3)]^2 = 0,$$

où $\alpha_2(x_1, x_2, x_3)$, $\alpha_4(x_1, x_2, x_3)$ sont des formes algébriques de degré 2 et 4, et α_0 une constante.

Les adjointes de F sont des quadriques passant par la courbe double γ et par conséquent dégénérées en le plan $x_4 = 0$ et un plan variable. Les courbes canoniques de F sont donc ses sections planes C.

(1) Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois (*Journal de Liouville*, 1896; *Œuvres*, t. II).

Les biadjointes de F sont les surfaces du quatrième ordre passant doublement par la courbe γ; elles sont formées du plan $x_4=0$ et des surfaces cubiques passant par la courbe γ.

On en conclut que la surface F présente les caractères $p_g=4$, $p^{(1)}=7$, $P_2=10$. De plus, les courbes bicanoniques découpent une série complète sur une courbe canonique et par conséquent F est une surface régulière : $p_a=4$.

L'homologie H détermine sur F une involution I_2 d'ordre deux. La courbe de F infiniment voisine de γ est transformée en elle-même par H et les points unis de l'involution I_2 sont les points-pinces de la surface sur la courbe γ.

Les plans tangents en un point x de la courbe γ à la surface sont donnés par l'équation

$$\left(X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+X_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2+\alpha_4 X_4^2=0.$$

Les points-pinces sont donc donnés par $\alpha_4=0$ et l'involution I_2 possède donc douze points unis.

2. Le système bicanonique $|2C|$ de la surface contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_2; ils sont découpés par les surfaces

$$x_4[\lambda_0 x_4^2+\lambda_{11}x_1^2+\lambda_{22}x_2^2+\lambda_{33}x_3^2+\lambda_{23}x_2x_3+\lambda_{31}x_3x_1+\lambda_{12}x_1x_2]=0, \quad (1)$$

$$x_4^2(\mu_1 x_1+\mu_2 x_2+\mu_3 x_3)+f(x_1,x_2,x_3)=0. \quad (2)$$

Pour obtenir un modèle projectif de la surface Φ image de I_2, rapportons projectivement les surfaces du système (1) aux hyperplans d'un espace S_6 en posant

$$\frac{X_{11}}{x_1^2}=\frac{X_{22}}{x_2^2}=\frac{X_{33}}{x_3^2}=\frac{X_{23}}{x_2x_3}=\frac{X_{31}}{x_3x_1}=\frac{X_{12}}{x_1x_2}=\frac{X_0}{x_4^2}. \quad (3)$$

Les équations de la surface Φ sont

$$\left.\begin{array}{lll} X_{22}X_{33}-X_{23}^2=0, & X_{33}X_{11}-X_{31}^2=0, & X_{11}X_{22}-X_{12}^2=0, \\ X_{11}X_{23}-X_{12}X_{31}=0, & X_{22}X_{31}-X_{12}X_{23}=0, & X_{33}X_{12}-X_{31}X_{23}=0, \\ & \alpha_0 X_0^3+X_0^2A_1+X_0A_2+F'=0, & \end{array}\right\} \quad (4)$$

où A_1 est la forme linéaire en $X_{11}, X_{22}, \ldots, X_{12}$ tirée de α_2, A_2 la forme quadratique tirée de α_4 et F' la forme cubique tirée de $[f(x_1,x_2,x_3)]^2$.

Les six premières équations représentent le cône V^4_3 projetant une surface de Veronese du point $X_{ik}=0$, $X_0=1$ et la dernière une hypersurface cubique V^3_5.

Φ est donc une surface du douzième ordre dont les sections hyperplanes sont les courbes bicanoniques. Les courbes canoniques sont découpées par les cônes du second ordre appartenant à V^4_3. La surface présente les caractères $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 4$, $P_2 = 7$.

Désignons par φ la surface de Veronese section du cône V^4_3 par l'hyperplan $X_0 = 0$, surface qui est représentée par les six premières des équations (4). Le cône $F' = 0$ coupe φ suivant une courbe du sixième ordre représentant sur cette surface la courbe γ. Il en résulte que le cône V^4_3 touche le cône $F' = 0$ suivant un cône du sixième ordre V^6_2. La section de ce cône V^6_2 par $X_0 = 0$ consitue l'intersection complète de la surface Φ par cet hyperplan, qui touche donc Φ suivant cette courbe.

Observons qu'aux points

$$X_0 = 0, \quad F = 0, \quad A_2 = 0,$$

l'hypersurface V^3_5 touche le cône V^4_2 et que par conséquent ces 12 points sont doubles pour la surface Φ. Ce sont précisément les points de diramation de la correspondance (1, 2) existant entre Φ et F.

3. Pour obtenir un second modèle projectif de la surface Φ, rapportons projectivement les surfaces (2) aux plans d'un espace S_3 en posant

$$\frac{X_1}{x_1 x_4^2} = \frac{X_2}{x_2 x_4^2} = \frac{X_3}{x_3 x_4^2} = \frac{X_4}{f(x_1, x_2, x_3)}. \tag{5}$$

En éliminant les x entre ces équations et celle de la surface F, on trouve

$$X_4^3 f(X_1, X_2, X_3) + X_4^2 \alpha_4(X_1, X_2, X_3) + X_4 \alpha_2(X_1, X_2, X_3) f(X_1, X_2, X_3,) + \alpha_0 [f(X_1, X_2, X_3)]^2 = 0.$$

Nous désignerons cette surface par Φ'. C'est une surface du sixième ordre, présentant un point triple $O_4(0, 0, 0, 1)$ et une courbe double γ' d'équations

$$X_4 = 0, \quad f(X_1, X_2, X_3) = 0.$$

Les surfaces (2) passant par les points unis de l'involution I_2, il doit correspondre à ces points, sur Φ', douze droites. Celles-ci sont les intersections des cônes

$$\alpha_4(X_1, X_2, X_3) = 0, \quad f(X_1, X_2, X_3) = 0.$$

Les courbes canoniques de Φ' correspondent aux sections de la surface F par les plans passant par le centre de l'homologie H; ce sont donc les sections de la surface par les plans passant par O_4. Effectivement, les courbes canoniques de Φ' sont découpées par les quadriques passant par la courbe double γ' et par le point triple O_4; ces quadriques sont donc formées par le plan de γ' et par les plans passant par O_4.

Les courbes bicanoniques de Φ' sont découpées par les surfaces du quatrième ordre passant doublement par la courbe γ' et par le point O_4; ces surfaces comprennent le plan de γ' et sont complétées par les surfaces cubiques passant par la courbe γ' et ayant un point double en O_4. Désignons ces courbes par Γ; elles correspondent aux courbes 2C découpées sur F par les surfaces (1) et ne rencontrent pas les droites $\alpha_4=0$, $f=0$ en des points variables.

Posons, pour abréger,

$$L(x_1, x_2, x_3) = \lambda_{11} x_1^2 + \lambda_{22} x_2^2 + \cdots + \lambda_{12} x_1 x_2.$$

De l'équation (1) et des équations (5) on déduit l'équation

$$\begin{aligned} \alpha_6 X_4^2 [L(X_1, X_2, X_3)]^2 + 2\alpha_0 \lambda_0 X_4 f(X_1, X_2, X_3)\, L(X_1, X_2, X_3) \\ - \lambda_0^2 [X_4^3 f(X_1, X_2, X_3) + X_4^2 \alpha_4 (X_1, X_2, X_3) \\ + X_4 \alpha_2 (X_1, X_2, X_3,) f(X_1, X_2, X_3] = 0 \end{aligned}$$

d'une famille de surfaces dont chacune est inscrite dans la surface Φ' le long d'une courbe Γ.

La présence d'un point triple O_4 et d'une courbe double γ' sur la surface Φ' se justifie de la manière suivante :

Par les équations (5), à une droite passant par $O(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ correspond une droite passant par O_4 dans une homographie. Une droite passant par O coupe F en six points formant trois couples de I_2, auxquels correspondent trois points de Φ' situés sur la droite homologue. Considérons en particulier une droite passant par O et s'appuyant sur la courbe γ. Elle rencontre F suivant trois couples de I_2 dont l'un est formé de deux points infiniment voisins de γ. A ce couple correspond sur Φ' un point infiniment voisin de O_4. Aux deux autres couples de I_2 situés sur la droite considérée, correspondent deux points infiniment voisins de γ'. On remarquera, en effet, que la droite homologue de la droite considérée ne rencontre pas Φ' en dehors de O_4 et de γ'.

Le domaine du point triple O_4 sur la surface Φ', qui est équivalent à une cubique elliptique, représente donc l'involution déterminée par I_2 dans le domaine de la courbe γ sur la surface F.

Liége, le 11 mai 1943.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4) N° Réf. 2019.