Bulletin de la Classe des sciences

Variétés algébriques dont les variétés canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de variétés algébriques possédant des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.

Variétés algébriques dont les variétés canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction de variétés algébriques possédant des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.

Il est aisé de construire des variétés algébriques dont les variétés canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro. Il suffit de considérer une variété intersection complète d'hypersurfaces algébriques, la somme des ordres de celles-ci dépassant d'une unité la dimension de l'espace ambiant. Mais il en existe d'autres qui, en général, représentent des involutions cycliques privées de points unis, appartenant à une variété de la première espèce. C'est à de telles variétés que cette note est consacrée.

Précisément, nous considérons la variété image d'une involution cyclique d'ordre premier impair p appartenant à la variété intersection de deux hypersurfaces. Nous commencerons par le cas le plus simple $p = 3$ pour indiquer ensuite le cas général.

Mentionnons que nous rencontrons un faisceau de surfaces dont la courbe-base est la courbe canonique de chacune des surfaces du faisceau.

1. Soit dans un espace S_5 à cinq dimensions, H une homographie de période trois ayant comme axes ponctuels trois droites r_1, r_2, r_3. Désignons par $x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1$ les coordonnées des points de S_5, les équations de l'homographie H étant

$$\rho x_i' = x_i, \ \rho y_i' = \varepsilon y_i, \ \rho z_i' = \varepsilon^2 z_i, \quad (i = 0,1)$$

ε étant une racine cubique primitive de l'unité.

La droite r_1 a pour équations $y_0 = y_1 = z_0 = z_1 = 0$ et les droites r_2,r_3 les équations que l'on obtient par permutations tournantes.

Le système des hypersurfaces cubiques de S_5 contient trois systèmes appartenant à l'involution I engendrée par H dans S_5.

Le premier, $| V_1 |$, a pour équation

$$a_x^3 + b_y^3 + c_z^3 + d_x d_y d_z = 0$$

et contient 20 termes. Le système $| V_1 |$ a donc la dimension 19.

Le second système $| V_2 |$ a pour équation

$$f_x^2 f_y + g_y^2 g_z + h_z^2 h_x = 0$$

et a la dimension 17.

Le troisième système $| V_3 |$ a pour équation

$$f_x'^2 f_z' + g_y'^2 g_x' + h_z'^2 h_y' = 0$$

et a également la dimension 17.

Rapportons projectivement les variétés V_1 aux hyperplans d'un espace S_{19} à 19 dimensions. Il correspond aux groupes de l'involution I les points d'une variété W à cinq dimensions, d'ordre 3^4.

Aux droites r_1,r_2,r_3 correspondent respectivement trois cubiques gauches K_1,K_2,K_3 et aux groupes de points appartenant aux droites r_1,r_2,r_3 les points d'une variété de Segre H_0 d'ordre six et de dimension trois. Dans la correspondance (1,3) existant entre W et S_5, les éléments de diramation sont K_1,K_2,K_3,H_0.

2. Considérons la variété V_{11} intersection de deux variétés V_1 que nous pouvons choisir de telle sorte que la variété V_{11} ne rencontre aucune des droites r_1,r_2,r_3. A la variété V_{11} correspond la section de W par un espace S_{17} à 17 dimensions, variété que nous désignerons par Ω. Cette variété ne rencontre ni K_1, ni K_2, ni K_3, ni H_0. Elle représente les groupes de l'involution I engendrée par H sur V_{11}, involution privée de points unis.

Les surfaces canoniques de la variété V_{11} sont découpées par les hypersurfaces d'ordre $3 + 3 - (5 + 1) = 0$, c'est-à-dire que la variété V_{11} possède une surface canonique et par suite des surfaces pluricanoniques d'ordre zéro.

Dans le système $| G |$ des sections hyperplanes de V_{11}, il existe trois faisceaux de surfaces appartenant à l'involution I. L'un, $| G_1 |$, est découpé par les hyperplans passant par les droites r_2, r_3, les autres $| G_2 |, | G_3 |$ sont découpés par les hyperplans passant par les droites r_3, r_1 ou par les droites r_1, r_2. Nous désignerons par $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ les surfaces qui correspondent respectivement aux surfaces G_1, G_2, G_3 sur la variété Ω.

Considérons une surface $\overline{G}_1$ et son homologue $\overline{\Gamma}_1$. Sur $\overline{G}_1$, les courbes canoniques sont les sections hyperplanes et celles de ces courbes qui appartiennent à l'involution I sont une courbe isolée $(\overline{G}_1, G_1)$ et deux faisceaux de courbes $| (\overline{G}_1, G_2) |$, $| (\overline{G}_1, G_3) |$.

Nous avons démontré qu'à une courbe canonique de la surface $\overline{\Gamma}_1$ correspondait sur $\overline{G}_1$ une courbe appartenant à l'involution I et au système de dimension minimum. Donc la surface $\overline{\Gamma}_1$ possède une seule courbe canonique $(\overline{\Gamma}_1, \Gamma_1)$, homologue de $(\overline{G}_1, G_1)$.

Il en résulte que $| \Gamma_1 |$ est son propre adjoint et que la variété Ω possède une courbe canonique d'ordre zéro. Les courbes pluricanoniques de Ω sont également d'ordre zéro.

Remarquons que *le faisceau de surfaces* $| \Gamma_1 |$ *a pour courbe-base la courbe* (Γ_1, Γ_1) *de genre et d'ordre neuf, qui est la courbe canonique de chacune des surfaces du faisceau.*

3. Désignons par F les surfaces d'ordre 27 sections de la variété V_{11} par les hypersurfaces cubiques de S_5. Soit $| F_1 |$ le système découpé sur V_{11} par les hypersurfaces V_1 ne contenant pas V_{11}. Le système $| F_1 |$ a la dimension 17 et les systèmes $| F_2 |, | F_3 |$ découpés par les hypersurfaces V_2, V_3 ont également la dimension 17.

Soient $\overline{F}_1$ une surface du système $| F_1 |$ et $\overline{\Phi}_1$ la surface qui lui correspond sur Ω. Dans le système canonique $| (\overline{F}_1, F) |$ de $\overline{F}_1$, il y a trois systèmes appartenant à l'involution I. Ce sont les systèmes $| (\overline{F}_1, F_1) |$, de dimension 16 et les systèmes $| (\overline{F}_1, F_2) |$, $| (\overline{F}_1, F_3) |$ de dimension 17. Il en résulte que le transformé du système canonique de $\overline{\Phi}_1$ est le premier de ces systèmes. Si nous désignons par Φ_1 les surfaces qui correspondent sur Ω aux surfaces F_1, le système canonique de $\overline{\Phi}_1$ est $| (\overline{\Phi}_1, \Phi_1) |$ et ce système est son propre adjoint, comme on l'avait trouvé plus haut.

La section Ω *de la variété* W *par un espace à* 17 *dimensions possède des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.*

Les courbes canoniques d'une surface Φ_1 sont découpées par les hyperplans, donc *Les sections de la variété* W *par des espaces à* 16 *dimensions sont des surfaces projectivement canoniques.*

Le genre arithmétique p_a d'une surface F_1 est égal à 53 et celui de la surface Φ_1 homologue est $p'_a = 17$. On a donc bien

$$p_a + 1 = 3(p'_a + 1).$$

L'ordre d'une surface Φ_1 est 3^4, donc le genre linéaire de cette surface est $p^{(1)} = 3^4 + 1$. A une section de la surface F_1 par un hyperplan correspond dans S_5 une section de V_{11} par une variété du système $| 4V_1 |$ et la série canonique d'une telle courbe est d'ordre 2.3^5, d'où, par la formule de Zeuthen, la valeur trouvée pour $p^{(1)}$.

4. Passons au cas général et considérons dans un espace S_{2p-1} à $2p - 1$ dimensions, une homographie H de période p, ayant comme axes ponctuels p droites $r_1, r_2, \dots, r_p, p$ étant un nombre premier impair.

Les hypersurfaces d'ordre p de S_{2p-1} contiennent p systèmes linéaires appartenant à l'involution I engendrée par H dans S_{2p-1}. L'un d'eux, $| V_1 |$, ne rencontre pas les droites $r_1, r_2, \dots, r_p$. Soit R sa dimension.

Rapportons projectivement les variétés V_1 aux hyperplans d'un espace S_R à R dimensions. Aux groupes de I correspondent les points d'une variété W d'ordre p^{p-1}.

Aux droites $r_1, r_2, \dots, r_p$ correspondent des courbes rationnelles normales d'ordre p et aux groupes de points situés sur les p droites, une variété de Segre d'ordre $p!$. Ce sont les éléments de diramation pour la correspondance $(1,p)$ existant entre W et S_{2p-1}.

5. Considérons la variété V_{11} à $2p - 3$ dimensions intersection de deux hypersurfaces V_1 choisies de telle sorte que V_{11} ne rencontre aucune des droites $r_1, r_2, \dots, r_p$. Soit Ω la variété qui lui correspond sur W, intersection de cette variété avec un espace à $R - 2$ dimensions.

Les variétés canonique et pluricanoniques de V_{11} sont d'ordre zéro.

Dans le système $| G |$ des sections hyperplanes de V_{11}, il existe p faisceaux appartenant à l'involution I. Ce sont les systèmes $| G_i |$

(1) *Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1938, pp. 291-297).

découpés par les hyperplans passant par les droites r sauf par r_i. Désignons par Γ_i les variétés qui correspondent aux variétés G_i sur Ω.

Sur une variété G_1, le système canonique, découpé par les hyperplans, contient p systèmes appartenant à l'involution I. L'un est une courbe isolée (G,G_1), les autres sont des faisceaux (G_1,G_2), (G_1,G_3), ...,(G_1,G_p). A une courbe canonique de la variété Γ_1, homologue de G_1 sur Ω correspond la courbe unique (G_1,G_1). Il en résulte que le système $| \Gamma_1 |$ des variétés qui correspondent aux variétés G_1 sur Ω, est son propre adjoint. La variété Ω possède donc des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.

Le faisceau $| \Phi_1 |$ a comme base une variété qui est la variété canonique de chaque variété du faisceau.

La courbe (G_1,G_1) est d'ordre p^2 et de genre $2p^2 + 1$, donc la variété (Γ_1,Γ_1) est d'ordre p^2.

6. Le système canonique d'une variété F section de V_{11} par une variété V_1 est découpé par les variétés V_1, donc le système canonique d'une variété, Φ_1 homologue de F sur Ω est découpé par les hyperplans de S_{R-2}.

En résumé:

La variété Ω à $2p - 3$ dimensions, située dans un espace à R $-$ 2 *dimensions, possède des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.*

Les sections hyperplanes de la variété Ω sont des variétés projectivement canoniques.

7. Il s'agit maintenat d'évaluer R.

Dans notre note déjà citée ([1]), nous avons établi la propriété suivante: Considérons une variété F et la variété homologue Φ sur Ω. Si p_g est le genre géométrique de la variété Φ et si le système canonique de F contient p systèmes appartenant à l'involution I, l'un de ces systèmes de dimension $p_g - 1$ est le transformé du système canonique de Φ, les autres ont la même dimension p_g ou $p_g - 2$ suivant que la dimension de la variété est paire ou impaire.

Actuellement, la dimension de la variété F est $2p - 4$, donc paire et le système canonique de F contient certainement p systèmes appar-

([1]) *Sur une propriété...*, loc. cit.

tenant à l'involution I, car le système des sections de F par les hypersurfaces d'ordre p contient p systèmes appartenant à I.

Nous avons $p_g = R - 2$, donc parmi les systèmes canoniques de F appartenant à I, l'un a la dimension $R - 3$, les autres la dimension $R - 2$. D'après la théorie des homographies, nous devons avoir

$$R - 3 + (p - 1)(R - 2) + p = \binom{3p - 1}{p} - 3,$$

c'est-à-dire

$$pR = \binom{3p - 1}{p} + p - 2.$$

Le dernier terme du numérateur de $\binom{3p - 1}{p}$ est $2p$, donc nous avons

$$pR = 2\binom{3p - 1}{p - 1} + p - 2.$$

Développons le numérateur de $\binom{3p - 1}{p - 1}$ suivant les puissances décroissantes de $3p$. Le dernier terme est $(p - 1)!$ et nous avons une expression de la forme

$$\binom{3p - 1}{p - 1} = 3pA + 1.$$

Le premier membre est un entier qui ne présente pas p en dénominateur, donc A est un entier et on obtient finalement

$$R = 6A + 1.$$

Liège, le 22 novembre 1974.