Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 19 octobre 1935, n° 10.

Sur les courbes canoniques,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

(*Seconde note.*)

Dans une note récente parue sous le même titre [1], nous avons montré qu'une courbe canonique de genre π appartient à une surface rationnelle commune à $\pi - 3$ hyperquadriques linéairement indépendantes, ayant, en outre, en commun un espace linéaire à $\pi - 4$ dimensions. Toutes ces hyperquadriques sont $\pi - 6$ fois spécialisées; c'est-à-dire sont des cônes ayant pour sommet un espace linéaire à $\pi - 7$ dimensions. Nous montrons dans cette note que parmi ces hyperquadriques, il y en a ∞^1 qui sont $\pi - 6$ fois spécialisées et un nombre fini qui sont $\pi - 5$ fois spécialisées.

1. Soit C une courbe canonique de genre $\pi > 5$, non hyperelliptique, d'ordre $2\pi - 2$, située dans un espace linéaire $S_{\pi-1}$ à $\pi - 1$ dimensions, intersection complète de $\frac{1}{2}(\pi - 2)(\pi - 3)$ hyperquadriques $V^2_{\pi-2}$ linéairement indépendantes.

La courbe C appartient à une surface rationnelle F, d'ordre $\frac{1}{2}(\pi^2 - 5\pi + 8)$, intersection $\pi - 3$ hyperquadriques $V^2_{\pi-2}$, linéairement indépendantes, ayant en commun, en outre, un espace linéaire $\sigma_{\pi-4}$, à $\pi - 4$ dimensions, s'appuyant en

[1] *Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1935, pp. 481-489.

$\pi - 3$ points sur C. Les équations de ces $\pi - 3$ hyperquadriques peuvent s'écrire sous la forme

$$x_4\alpha_{i4} + x_5\alpha_{i5} + \cdots + x_\pi\alpha_{i\pi} + \alpha_i = 0 \qquad (1)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \pi - 3),$$

où les α_{ik} sont des formes algébriques linéaires, les α_i des formes quadratiques en x_1, x_2, x_3. L'espace $\sigma_{\pi-4}$ a pour équations $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Les hyperquadriques (1) sont spécialisées; ce sont précisément des cônes ayant pour sommets des espaces linéaires à $\pi - 7$ dimensions donnés par

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0, \sum_{k=4}^{\pi} x_k \frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial x_1} = 0, \sum_{k=4}^{\pi} x_k \frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial x_2} = 0, \sum_{k=4}^{\pi} x_k \frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial x_3} = 0.$$

Disposons de la figure de référence de manière que la première des hyperquadriques (1) ait pour espace double l'espace $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$. L'équation de cette variété est alors

$$x_4\alpha_{14} + x_5\alpha_{15} + x_6\alpha_{16} + \alpha_1 = 0. \qquad (2)$$

Projetons la surface F à partir de l'espace $x_1 = \ldots = x_6 = 0$ sur l'espace S_5 à cinq dimensions d'équations $x_7 = \ldots = x_\pi = 0$. La projection F′ est l'intersection de l'hyperquadrique (2) et de la variété d'équations

$$\| \alpha_{i7} \quad \alpha_{i8} \ldots \alpha_{i\pi} \quad x_4\alpha_{i4} + x_5\alpha_{i5} + x_6\alpha_{i6} + \alpha_i \| = 0 \qquad (3)$$
$$(i = 2, 4, \ldots, \pi - 3).$$

Cette variété, à trois dimensions, a l'ordre $\frac{1}{2}(\pi^2 - 7\pi + 14)$. Or, les $\pi - 4$ dernières hyperquadriques (1) ont en commun, en dehors de $\sigma_{\pi-4}$, une variété à trois dimensions d'ordre $\frac{1}{2}(\pi^2 - 7\pi + 14)$; on en conclut que les espaces $S_{\pi-7}$, sommets des cônes (1), ne recontrent pas cette variété ni, par suite, en général, la surface F.

La variété V_3 dont il vient d'être question rencontre $\sigma_{\pi-4}$

suivant une surface d'ordre $\frac{1}{2}(\pi-4)(\pi-5)$; cette surface est projetée sur l'espace S_5 suivant le plan $x_1=x_2=x_3=0$ de la quadrique (2). Ce plan est donc multiple d'ordre $\frac{1}{2}(\pi-4)$ $(\pi-5)$ pour la variété (3). Celle-ci coupe l'hyperquadrique (2) suivant la surface F′, d'ordre $\frac{1}{2}(\pi^2-5\pi+8)$ et suivant le plan $x_1=x_2=x_3=0$, compté $\frac{1}{2}(\pi-4)(\pi-5)$ fois.

A la courbe C correspond, dans S_5, une courbe d'ordre $2\pi-2$ rencontrant le plan $x_1=x_2=x_3=0$ en $\pi-3$ points.

2. Représentons, pour abréger, par f_i le premier membre de l'équation (1). L'équation

$$\mu_1 f_1+\mu_2 f_2+\cdots+\mu_{\pi-3}f_{\pi-3}=0 \tag{4}$$

représente une hyperquadrique passant par $\sigma_{\pi-4}$ et par F, ayant un espace $S_{\pi-7}$ double dans $\sigma_{\pi-4}$. Pour que l'hyperquadrique (4) ait un espace $S_{\pi-6}$ double dans $\sigma_{\pi-4}$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\left\|\begin{matrix} \Sigma\mu_i\dfrac{\partial\alpha_{i4}}{\partial x_1} & \Sigma\mu_i\dfrac{\partial\alpha_{i5}}{\partial x_1} & \dots & \Sigma\mu_i\dfrac{\partial\alpha_{i\pi}}{\partial x_1} \\ \Sigma\mu_i\dfrac{\partial\alpha_{i4}}{\partial x_2} & . & \dots & \Sigma\mu_i\dfrac{\partial\alpha_{i\pi}}{\partial x_2} \\ \Sigma\mu_i\dfrac{\partial\alpha_{i4}}{\partial x_3} & . & \dots & \Sigma\mu_i\dfrac{\partial\alpha_{i\pi}}{\partial x_3} \end{matrix}\right\|=0,$$

$$(i=1,2,\dots,\pi-3),$$

c'est-à-dire $\pi-5$ relations entre les $\pi-3$ variables homogènes μ. Parmi les hyperquadriques (4) passant par F et par $\sigma_{\pi-4}$, il y en a donc ∞^1 qui sont des cônes ayant comme sommet un espace $S_{\pi-6}$.

Désignons par $Q_1, Q_2, \dots, Q_{\pi-3}$ les hyperquadriques (1) et supposons que la première soit un cône ayant un $S_{\pi-6}$ comme sommet. Les hyperquadriques $Q_2, Q_3, \dots, Q_{\pi-3}$ ont en commun une variété V_2 d'ordre $\frac{1}{2}(\pi^2-7\pi+14)$ coupant $\sigma_{\pi-4}$ suivant une surface F_0 d'ordre $\frac{1}{2}(\pi - 4)(\pi - 5)$. Cette surface est rencontrée par l'espace double $S_{\pi-6}$ de Q_1 en $\frac{1}{2}(\pi - 4)(\pi - 5)$ points. Q_1 contient F_0 et coupe la variété V_3 en question suivant F et F_0; la surface F coupe $\sigma_{\pi-4}$ suivant une courbe C_0 d'ordre $\frac{1}{2}(\pi - 3)(\pi - 4)$ et de genre $\frac{1}{2}(\pi - 4)(\pi - 5)$ qui doit passer par les $\frac{1}{2}(\pi - 4)(\pi - 5)$ points communs à F_0 et à l'espace double de Q_1, puisque ces points sont doubles pour l'intersection de V_3 et de Q_1.

3. Disposons de la figure de référence de telle sorte que le $S_{\pi-6}$ sommet du cône Q_1 ait pour équations $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$. L'équation de ce cône prend la forme

$$x_4 \alpha_{14} + x_5 \alpha_{15} + \alpha_1 = 0. \tag{5}$$

Projetons la surface F à partir de cet espace $S_{\pi-6}$ sur l'espace S_4 d'équations $x_6 = \ldots = x_\pi = 0$. On obtient ainsi une surface F'' intersection de l'hyperquadrique (5) et de la variété à trois dimensions d'équations

$$| \alpha_{i6} \quad \alpha_{i7} \ldots \alpha_{i\pi} \quad x_4 \alpha_{i4} + x_5 \alpha_{i5} + \alpha_i | = 0. \tag{6}$$

La variété (6) est d'ordre $\pi - 3$ et rencontre l'hyperquadrique (5) suivant une surface d'ordre $\pi - 3$. Ceci confirme que l'espace $S_{\pi-6}$ considéré coupe F et par suite C_0 en $\frac{1}{2}(\pi - 4)(\pi - 5)$ points.

Les $\infty^{\pi-4}$ *hyperquadriques* $V^2_{\pi-2}$ *de* $S_{\pi-1}$, *passant par l'espace* $\sigma_{\pi-4}$ *et par la surface* F, *sont* $\pi - 6$ *fois spécialisées;* ∞^1 *d'entre elles sont* $\pi - 5$ *fois spécialisées et les espaces linéaires à* $\pi - 6$ *dimensions, sommets de ces hyperquadriques, s'appuient en* $\frac{1}{2}(\pi - 4)(\pi - 5)$ *points sur la courbe* C_0, *d'ordre* $\frac{1}{2}(\pi - 3)(\pi - 4)$ *et de genre* $\frac{1}{2}(\pi - 4)(\pi - 5)$, *intersection de la surface* F *et de l'espace* $\sigma_{\pi-4}$.

A la courbe correspond, sur la surface F'', une courbe d'ordre $2\pi - 2$ rencontrant la droite $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ en

$\pi - 3$ points. On peut d'ailleurs observer que cette droite est multiple d'ordre $\pi - 4$ pour la variété (6).

4. Si l'on projette la courbe C à partir de $\sigma_{\pi-4}$ sur un plan ϖ ne rencontrant pas cet espace, on obtient une courbe C′ d'ordre $\pi + 1$, de genre π, possédant par conséquent $\frac{1}{2}\pi(\pi-3)$ points doubles. Il y a donc $\frac{1}{2}\pi(\pi - 3)$ espaces linéaires $S_{\pi-3}$ passant par $\sigma_{\pi-4}$ et coupant encore C en deux points en dehors de cet espace. Soit $\Sigma_{\pi-3}$ l'un de ces espaces. Les $\infty^{\pi-4}$ hyperquadriques (4) découpent sur $\Sigma_{\pi-3}$ des hyperquadriques qui comprennent $\sigma_{\pi-4}$ comme partie fixe; les $\infty^{\pi-4}$ hyperquadriques (4) découpent donc, sur $\Sigma_{\pi-3}$, des hyperplans variables passant par les deux points de C appartenant à $\Sigma_{\pi-3}$ mais non à $\sigma_{\pi-4}$. Il en résulte qu'une des hyperquadriques en question contient $\Sigma_{\pi-3}$.

Disposons de la figure de référence de manière que $\Sigma_{\pi-3}$ ait pour équations $x_2 = x_3 = 0$. Supposons que Q_1 soit l'hyperquadrique contenant cet espace. Son équation s'écrit alors sous la forme

$$x_4\alpha_{14}(x_2,x_3) + \cdots + x_\pi\alpha_{1\pi}(x_2,x_3) + x_1\alpha_{11}(x_2,x_3) + \alpha_{10}(x_2,x_3) = 0, \qquad (7)$$

où les α sont des formes binaires en x_2, x_3, linéaires, sauf la dernière, qui est quadratique.

L'hyperquadrique (7) est un cône ayant pour sommet un espace $S_{\pi-5}$ à $\pi - 5$ dimensions, appartenant à $\Sigma_{\pi-3}$, mais non à $\sigma_{\pi-4}$. On peut disposer de la figure de référence de manière que cet espace $S_{\pi-5}$ ait pour équations $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$; l'équation (7) prend alors la forme

$$x_4\alpha_{14}(x_2,x_3) + x_5\alpha_{15}(x_2,x_3) + \alpha_{10}(x_2,x_3) = 0. \qquad (8)$$

La surface F est projetée, à partir de l'espace $x_2 = \ldots = x_5 = 0$, sur l'espace $x_1 = 0$, $x_6 = \ldots = x_\pi = 0$, suivant la quadrique (8), comptée $\pi - 3$ fois.

Inversement, supposons que par la surface F et par $\sigma_{\pi-4}$ passe une $V^2_{\pi-2}$ contenant un espace $\Sigma_{\pi-3}$ à $\pi - 3$ dimensions. Les $\infty^{\pi-5}$ hyperquadriques (4) découpent sur $\Sigma_{\pi-3}$, en dehors de $\sigma_{\pi-4}$, $\infty^{\pi-5}$ espaces $S_{\pi-4}$ formant une gerbe dont la droite-sommet appartient à F (et coupe $\sigma_{\pi-4}$ en un point). Si l'on projette F de $\sigma_{\pi-4}$ sur le plan ϖ, aux sections hyperplanes de F correspondront des courbes d'ordre $\pi - 2$ passant par le point de rencontre de ϖ et de $\Sigma_{\pi-3}$. Le système formé par ces courbes d'ordre $\pi - 2$ dans ϖ, ayant le degré $\frac{1}{2}(\pi^2 - 5\pi + 8)$, possède $\frac{1}{2}\pi(\pi - 3)$ points-base. Par suite :

Il existe $\frac{1}{2}\pi(\pi - 3)$ *hyperquadriques* $\pi - 4$ *fois spécialisées passant par la surface* F *et par l'espace* $\sigma_{\pi-4}$.

De plus, *la surface* F *contient* $\frac{1}{2}\pi(\pi - 3)$ *droites s'appuyant sur* $\sigma_{\pi-4}$.

Liége, 19 septembre 1935.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.