Sur l'ordre des correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Dans une note récente [1], nous avons construit un exemple de correspondance rationnelle du cinquième ordre entre deux surfaces de genres un, c'est-à-dire, en d'autres termes, une involution d'ordre cinq, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Dans cette nouvelle note, nous poursuivons nos recherches sur ce sujet. Nous montrons qu'une involution d'ordre premier et de genres un a l'ordre au plus égal à onze et nous construisons un exemple d'involution d'ordre sept et de genres un appartenant à une surface (du quatrième ordre) de genres un. L'existence d'une involution d'ordre onze reste douteuse.

Les exemples d'involutions d'ordre cinq et d'ordre sept que nous avons construits appartiennent à des surfaces du quatrième ordre. Nous avons montré que l'on peut prendre, comme modèles projectifs des images de ces involutions, des surfaces du quatrième ordre possédant un nombre fini de points doubles biplanaires singuliers. Nous nous réservons de revenir plus tard sur ces surfaces.

---

(1) Remarques sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 1934, pp. 851-859). Consulter également, pour la structure des points de diramation rencontrés dans ce travail, notre seconde communication de nos « Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique » (*Ibidem*, 1931, pp. 1131-1150.)

1. Considérons dans un espace linéaire S_r, à r dimensions, une surface algébrique Φ, normale, possédant un point double biplanaire A auquel sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire, p étant un nombre impair. Nous pouvons supposer sans restriction $r > \frac{1}{2}(p-1)+3$, quitte à remplacer la surface Φ par une surface normale dont les sections hyperplanes sont des multiples convenablement choisis des sections hyperplanes de la surface Φ primitive.

Projetons la surface Φ du point A sur un hyperplan S_{r-1} de S_r, ne passant pas par A; nous obtenons une surface Φ_1 sur laquelle, au domaine du point A, correspondent un point double biplanaire A_1 et deux droites a_{11}, a_{12}, de degré -2, passant par A_1. Au point A_1 sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(p-5)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire.

Projetons la surface Φ_1 du point A_1 sur un espace S_{r-2} ne passant pas par A_1 et appartenant à l'espace S_{r-1} contenant Φ_1. Nous obtenons ainsi une surface Φ_2 sur laquelle, au domaine du point A_1 sur Φ_1, correspondent un point double biplanaire A_2 et deux droites a_{21}, a_{22}, de degré -2, passant par A_2. Au point A_2 sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(p-7)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. Aux droites a_{11}, a_{12} correspondent des points doubles coniques de la surface Φ_2, situés un sur chacune des droites a_{21}, a_{22}. Pour fixer les idées, nous supposerons que le point double correspondant à a_{11} se trouve sur a_{21}, celui qui correspond à a_{12}, sur la droite a_{22}.

En continuant de même, on arrivera finalement à une surface ayant un point double biplanaire ordinaire. On sait qu'un tel point est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à l'ensemble de deux droites de degré -2 se coupant en un point. En posant $p = 2n + 1$, nous pouvons désigner ces droites par a_{n1}, a_{n2}.

De ce qui précède, il résulte que le point A est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à l'ensemble de $p - 1$ courbes rationnelles de degré -2,

$$a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{12},$$

telles que deux courbes consécutives aient un point commun, deux courbes non consécutives ne se rencontrant pas.

Ces $p - 1$ courbes sont algébriquement indépendantes, car si l'on désigne par $n_{ii} = -2$ le degré de ces courbes et par n_{ik} le nombre de points communs à la i-ième et à la k-ième de ces courbes, le déterminant $|n_{ik}|$ est égal à p.

2. Supposons que la surface Φ possède τ points doubles biplanaires à chacun desquels sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(p - 3)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. Désignons par $|C|$ le système des sections hyperplanes de Φ, par m le degré de ce système (ordre de la surface Φ).

Chacun des τ points doubles biplanaires de Φ équivaut à un ensemble de $p - 1$ courbes rationnelles et les courbes rationnelles composantes d'un point ne rencontrent pas les courbes rationnelles composantes d'un autre point. De plus, les courbes C ne rencontrent pas les composantes des τ points doubles biplanaires de Φ. Il en résulte que le déterminant de l'ensemble des courbes C et des $\tau(p - 1)$ courbes rationnelles est égal à $\tau p m$. Ces courbes sont donc algébriquement indépendantes et le nombre base ρ de la surface Φ satisfait à l'inégalité

$$\rho \geq \tau(p - 1) + 1.$$

3. Considérons maintenant une surface F de genres un ($p_a = P_4 = 1$) contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier $p > 2$, n'ayant qu'un nombre fini de points unis et dont l'image soit une surface Φ de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

Nous avons établi que l'on peut prendre, pour modèle projectif de la surface Φ, une surface d'ordre $m = 2\pi - 2$, à sections hyperplanes de genre π, appartenant à un espace linéaire S_π à π dimensions, sur laquelle les points de diramation sont des points doubles biplanaires à chacun desquels est infiniment voisine une suite de $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire (1).

Le nombre τ des points de diramation de la surface Φ est donné par

$$(p+1)\tau = 24.$$

D'autre part, d'après ce que nous venons de voir, le nombre-base ρ de la surface Φ satisfait à l'inégalité

$$\rho \geq \tau(p-1)+1;$$

donc

$$\rho \geq 24\frac{p-1}{p+1}+1.$$

D'un autre côté, pour une surface de genres un, la formule de Picard donne

$$\rho + \rho_0 = 22,$$

où ρ_0 est le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce attachées à la surface (2). Comme la surface Φ, de genres un, possède une intégrale double de première espèce ($p_g = 1$), on a certainement $\rho_0 \geq 1$; d'où $\rho \leq 21$. On en déduit $p \leq 11$.

Une correspondance rationnelle d'ordre premier, entre deux surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$), *a l'ordre au plus égal à onze.*

Ou encore, *Une involution d'ordre premier et de genres un, appartenant à une surface de genre un, a l'ordre au plus égal à onze.*

(1) Remarques sur les correspondances..., *loc. cit.*

(2) F. Severi, Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero. (*Atti. R. Istituto Veneto*, 1908-1909, pp. 249-260.)

4. Nous avons montré l'existence d'involutions du cinquième ordre et de genres un appartenant à une surface de genres un (¹). Reprenons l'exemple que nous avons construit La surface F, du quatrième ordre,

$$a_1x_1^3x_2 + a_2x_2^3x_3 + a_3x_3^3x_4 + a_4x_4^3x_1 + a_5x_1^2x_3^2 + a_6x_2^2x_4^2 + a_7x_1x_2x_3x_4 = 0,$$

est transformée en elle-même par l'homographie H, de période cinq,

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^3 x_3 : \varepsilon^2 x_4,$$

où ε est une racine primitive cinquième de l'unité. La surface F est dépourvue de points multiples et est par conséquent de genres un ($p_a = P_4 = 1$). L'homographie H engendre sur la surface F une involution I_5, d'ordre cinq, possédant quatre points unis : les sommets du tétraèdre de référence. La surface Φ, image de l'involution I_5, est donc de genres un et l'on peut prendre, comme modèle projectif de cette surface, une surface d'ordre vingt, appartenant à un espace S_{11} à onze dimensions et possédant quatre points doubles biplanaires à chacun desquels est infiniment voisin un point double biplanaire ordinaire. On peut également obtenir comme modèle projectif de la surface Φ une surface du quatrième ordre.

Le système linéaire de surfaces cubiques

$$\lambda_1x_1^2x_4 + \lambda_2x_2^2x_1 + \lambda_3x_3^2x_2 + \lambda_4x_4^2x_3 = 0 \qquad (1)$$

est engendré par des surfaces transformées en elles-mêmes par H et découpe donc, sur la surface F, un système linéaire de courbes composé au moyen de l'involution I_5. Rapportons projectivement les surfaces du système (1) aux plans d'un espace ordinaire S_3 en posant

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1^2x_4 : x_2^2x_1 : x_3^2x_2 : x_4^2x_3.$$

A la surface F correspond la surface d'équation

$$\left.\begin{aligned} a_1X_1^2X_2X_3 + a_2X_2^2X_3X_4 + a_3X_3^2X_4X_1 + a_4X_4^2X_1X_2 + a_5X_1^2X_3^2 \\ + a_6X_2^2X_4^2 + a_7X_1X_2X_3X_4 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(¹) Remarques..., *loc. cit.*

modèle projectif de la surface Φ. La surface (2) ne possède que des points doubles isolés et par conséquent est bien de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

Les sommets du tétraèdre de référence sont des points doubles biplanaires de la surface (2). Pour étudier le point double O_1 (1, 0, 0, 0), effectuons la transformation quadratique

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \alpha_X^2 : X_1X_2 : X_1X_3 : X_1X_4,$$

où nous posons

$$\alpha_X = \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4.$$

L'inverse de cette transformation est représentée par

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = \alpha_y^2 : y_1y_2 : y_1y_3 : y_1y_4.$$

A la surface (2) correspond la surface

$$\left.\begin{aligned} &a_1 y_2 y_3 \alpha_y^4 + a_2 y_1^2 y_2^2 y_3 y_4 + a_3 y_1 y_3^2 y_4 \alpha_y^2 + a_4 y_1 y_2 y_4^2 \alpha_y^2 \\ &+ a_5 y_3^2 \alpha_y^4 + a_6 y_1^2 y_2^2 y_4^2 + a_7 y_1 y_2 y_3 y_4 \alpha_y^2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Au point infiniment voisin du point O_1 sur la droite $X_2 = X_3 = 0$ correspond le point (0, 0, 0, 1) de la surface (3). Ce point est double pour cette surface et le cône tangent à celle-ci en ce point a pour équation

$$a_1 \alpha_4^2 y_2 y_3 + a_4 y_1 y_2 + a_5 \alpha_4^2 y_3^2 = 0.$$

Ce cône étant irréductible, le point considéré est un point double conique. Le point O_1 est donc un point double biplanaire de la surface (2), les plans tangents en ce point étant

$$X_3 = 0, \qquad a_1 X_2 + a_5 X_3 = 0,$$

et à ce point est infiniment voisin un point double conique.

La symétrie de l'équation (2) par rapport aux coordonnées montre que les trois autres points doubles de la surface (2) jouissent des mêmes propriétés.

5. Considérons maintenant la surface du quatrième ordre F, d'équation

$$a_1 x_1^4 + a_2 x_2^3 x_3 + a_3 x_3^3 x_4 + a_4 x_4^3 x_2 + a x_1 x_2 x_3 x_4 = 0. \quad (1)$$

Cette surface est dépourvue de points doubles et est donc de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Elle est transformée en elle-même par l'homographie H d'équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^4 x_3 : \varepsilon^2 x_4,$$

où ε est une racine primitive septième de l'unité. L'homographie H engendre, sur la surface F, une involution I_7, d'ordre sept, ayant trois points unis : $O_2(0,1,0,0)$, $O_3(0,0,1,0)$ et O_4 $(0,0,0,1)$. La surface Φ, image de cette involution, est, par conséquent, de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

Pour obtenir un modèle projectif de la surface Φ, on peut rapporter projectivement aux hyperplans d'un espace linéaire S_{17} à 17 dimensions les surfaces du septième ordre transformées en elles-mêmes par l'homographie H et qui ne passent pas par les points unis de cette homographie. On obtient alors dans cet espace une surface d'ordre 28, à sections hyperplanes de genre 15, image de l'involution I_7, située dans deux hyperplans de S_{17}. Sur cette surface, les points de diramation sont des points doubles biplanaires à chacun desquels sont infiniment voisins successifs deux points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. Mais on peut également obtenir un modèle projectif de la surface Φ de la manière suivante :

Le système linéaire

$$\lambda_1 x_1^4 + \lambda_2 x_2^3 x_3 + \lambda_3 x_3^3 x_4 + \lambda_4 x_4^3 x_2 = 0$$

découpe, sur la surface F, un système linéaire de courbes composé au moyen de l'involution I_7. En posant

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1^4 : x_2^3 x_3 : x_3^3 x_4 : x_4^3 x_2,$$

l'équation (1) donne

$$(a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4)^4 - a^4 X_1 X_2 X_3 X_4 = 0, \tag{2}$$

surface image de l'involution I_7 et modèle projectif de la surface Φ. La surface (2), du quatrième ordre, possède six points doubles, intersections des arêtes du tétraèdre de référence et du plan

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = 0; \tag{3}$$

elle est donc de genres un ($p_a = P_4 = 1$). La surface (2) a un contact du troisième ordre avec les faces du tétraèdre de référence le long des droites suivant lesquelles ces quatre plans sont rencontrés par le plan (3).

6. Pour étudier de plus près les points doubles de la surface (2), changeons de notation en intervertissant les rôles des plans (3) et $X_1 = 0$, c'est-à-dire considérons la surface

$$X_1^4 - X_2X_3X_4(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4) = 0. \qquad (2')$$

Le point O_4 $(0, 0, 0, 1)$ est un des points doubles de la surface (2'); il est biplanaire et les plans tangents en ce point à la surface sont $X_2 = 0$, $X_3 = 0$. La droite commune à ces plans coupe la surface (2') en quatre points confondus en O_4; par conséquent, le point infiniment voisin de O_4 situé sur cette droite est double pour la surface (2').

Effectuons la transformation quadratique

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = y_1y_4 : y_1y_2 : y_1y_3 : y_4^2,$$

qui fait correspondre au point infiniment voisin de O_4 sur la droite $X_2 = X_3 = 0$, le point O'_4 $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$. A la surface (2') correspond la surface

$$y_1^2y_4^2 - y_2y_3(a_1y_1y_4 + a_2y_1y_2 + a_3y_1y_3 + a_4y_4^2) = 0.$$

Le point O'_4 est double conique pour cette surface, le cône tangent ayant pour équation

$$y_1^2 - a_4y_2y_3 = 0.$$

Par conséquent, la surface (2) possède six points doubles biplanaires à chacun desquels est infiniment voisin un point double conique.

7. Nous n'avons pu trouver un exemple d'involution d'ordre onze, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface de genres un. L'existence de ces involutions est d'ailleurs douteuse. Dans son mémoire sur *Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero*, déjà cité, M. Severi exprime en effet l'avis (p. 260) qu'il est assez probable que l'existence d'une intégrale double de première espèce entraîne celle d'une intégrale double de seconde espèce, distincte de la précédente. Il en résulterait que pour les surfaces de genres un $(p_a = P_4 = 1)$, on aurait $\rho_0 \geq 2$ et par suite que le nombre-base de ces surfaces serait $\rho \leq 20$. Si l'on se reporte aux développements du n° 3 de ce travail, on aurait dans ces conditions $p < 11$.

Liége, le 19 mars 1935.