EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, N° 11, 1935.

Sur une surface algébrique de diviseur deux,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

On sait que le diviseur σ d'une surface algébrique F, nombre introduit par M. Severi dans ses remarquables recherches sur la base (1), est le nombre maximum des systèmes de courbes non équivalentes appartenant à F équisousmultiples d'un même système. Dans ses recherches, M. Severi cite comme exemples de surfaces de diviseur σ supérieur à l'unité, la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre (surface d'Enriques) et certaines surfaces hyperelliptiques de rang supérieur à l'unité. Nous avons, en nous appuyant sur la théorie des involutions appartenant à une surface algébrique, montré comment on pouvait construire des surfaces de diviseur arbitraire (2) et en avons fait quelques applications. Nous nous proposons dans cette note d'étudier une surface de diviseur $\sigma = 2$, rencontrée incidemment dans nos recherches sur les surfaces algébriques.

1. Désignons par x_0, x_1, x_2, x_3 les coordonnées ponctuelles de l'espace. Soient $\varphi = 0$ l'équation, dans le plan $x_0 = 0$, d'une conique tangente en O_2 à la droite O_2O_1 et en O_3 à la droite O_3O_1 ; $f = 0$ l'équation, dans le même plan, d'une courbe d'ordre $4m + 4n - 2$ ayant en O_1 la multiplicité $2(2n-1)$, en O_2, O_3 des points multiples d'ordre $2m$ auxquels sont infiniment voisins, respectivement sur O_2O_1, O_3O_1, des points multiples d'ordre $2m$.

Considérons la surface F d'équation

$$x_0^2 x_1^{2(2m+2n-3)} x_2 x_3 + 2x_0 x_1^{2m+2n-3} x_2^n x_3^n \varphi^m + f = 0.$$

(1) Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica. (*Math. Annalen*, 1906, Bd. 62, pp. 194-225.) — La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique. (*Annales de l'Ec. norm. sup.*, 1908, pp. 449-468.) — Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica. (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1910, t. 30, pp. 265-288.)

(2) Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité. (*Bull. de l'Acad. des Sc. de Cracovie*, 1914, pp. 362-368.) — Exemples de surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité. (*Bull. des Sc. math.*, 1915, pp. 182-185.) — Sur une surface algébrique du huitième ordre. (*Tôhoku Math. Journal*, 1933, pp. 122-126.) — Voir aussi COMESSATTI, Sulle superficie multiple cicliche. (*Rend. Seminario matematico di Padova*, 1930, pp. 1-45.)

La surface F possède les singularités suivantes :

Le point O_0 est multiple d'ordre $4m + 4n - 4$.

La droite O_0O_1 est double, les plans tangents étant $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; chacun de ces plans coupe la surface en $4n - 4$ droites simples, infiniment voisines successives de O_0O_1.

La droite O_0O_2 est multiple d'ordre $2m$ et le plan tangent $x_3 = 0$ à la surface le long de cette droite coupe encore la surface suivant une droite multiple d'ordre $2m$ infiniment voisine de O_2O_0. La droite O_0O_3 présente la même singularité, le plan tangent à la surface le long de cette droite étant $x_2 = 0$.

2. La surface F est birationnellement équivalente au plan double (1) que l'on obtient en la projetant à partir de O_0 sur le plan $x_0 = 0$. La courbe de diramation de ce plan double a pour équation

$$x_1^{2(2m+2n-3)}\, x_2\, x_3\, (x_2^{2n-1}\, x_3^{2n-1}\, \varphi^{2m} - f) = 0$$

ou encore, en débarrassant cette courbe de la composante multiple d'ordre pair $x_1 = 0$,

$$x_2\, x_3\, (x_2^{2n-1}\, x_3^{2n-1}\, \varphi^{2m} - f) = 0.$$

La courbe de diramation se compose donc des droites O_1O_2, O_1O_3 et d'une courbe K présentant, aux points O_1 O_2, O_3, les mêmes singularités que la courbe $f = 0$.

Opérons dans le plan $x_0 = 0$ une transformation quadratique ayant pour points fondamentaux les points O_2, O_3 et un point O distinct de O_1. Soient O'_2, O'_3, O' les points fondamentaux correspondant respectivement aux droites OO_3, OO_2, O_2O_3; O'_1 le point homologue de O_1, O'_{12} le point de rencontre des droites $O'_1O'_2$ et $O'O'_3$; O'_{13} le point de rencontre des droites $O'_1O'_3$ et $O'O'_2$. A la courbe K correspond une courbe K' d'ordre $4m + 8n - 4$ ayant la multiplicité $4n - 2$ aux points O', O'_1; la multiplicité $2m + 4n - 2$ aux points O'_2, O'_3 et enfin la multiplicité $2m$ en O'_{12}, O'_{13}.

Au plan double primitif correspond un plan double que nous désignerons par F' et dont la courbe de diramation est composée de la courbe K' et des quatre droites $O'O'_2$, $O'O'_3$, $O'_1O'_2$, $O'_1O'_3$. Un

---

(1) Pour un exposé de la théorie des plans doubles, nous renvoyons à l'ouvrage : ENRIQUES-CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*. Padoue, 1932, pp. 344 et suiv.

tel plan double a le diviseur pair et en général le diviseur deux [1]. Par conséquent, *la surface* F *a le diviseur deux.*

3. Les courbes canoniques du plan double F′ sont des courbes doubles d'ordre $2m + 4n - 3$ ayant les multiplicités $2n - 1$ en O', O'_1; $m + 2n - 1$ en O'_2, O'_3, m en O'_{12}, O'_{13}. Ces courbes comprennent comme parties les quatre droites $O'O'_2$, $O'O'_3$, $O'_1O'_2$, $O'_1O'_3$ et sont complétées par des courbes d'ordre $2m + 4n - 7$ ayant les multiplicités $2n - 3$ en O', O'_1; $m + 2n - 3$ en O'_2, O'_3; $m - 2$ en O'_{12}, O'_{13}. On en déduit, en observant que le plan double est régulier,

$$p_a = p_g = 4mn - 3m - 2n + 1,$$
$$p^{(1)} = 16\,mn - 16\,m - 16\,n + 11.$$

Et par suite

$$P_2 = 20\,mn - 19\,m - 18\,n + 12.$$

4 Observons que le plan double considéré est également birationnellement équivalent à la surface d'équation

$$x_0^2\,x_1^{4m+4n-2} + 2x_0\,x_1^{2m+2n-1}\,x_2^n\,x_3^n\,\varphi^m + x_2 x_3 f = 0.$$

Cette surface, d'ordre $4m + 4n$, a le diviseur $\sigma = 2$ et présente les singularités suivantes :

Le point O_0 est multiple d'ordre $4m + 4n - 2$, le cône tangent en ce point se réduisant au plan $x_1 = 0$ compté $4m + 4n - 2$ fois.

La droite O_4O_2 est multiple d'ordre $2m + 1$ et la droite infiniment voisine dans le plan $x_3 = 0$ présente la même multiplicité. La droite O_0O_3 présente une singularité analogue.

5. Pour $m = n = 1$, le premier plan double considéré au n° 2 est le plan double d'Enriques ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) La surface F est du sixième ordre, à sections planes de genre cinq ; ce n'est donc pas une surface normale.

La surface considérée en dernier lieu (n° 4) est du huitième ordre et ses sections planes sont de genre neuf; ce n'est donc pas non plus une surface normale.

Liége, le 16 novembre 1935

---

[1] Sur certaines surfaces. (*Loc. cit.*)

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles