SUR LES POINTS UNIS NON PARFAITS DES INVOLUTIONS CYCLIQUES APPARTENANT A UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

Par L. GODEAUX, Liége

Soient F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p d'ordre premier p, ne possédant qu'un nombre fini de points unis, $|C|$ un système linéaire de courbes composé au moyen de I_p et n'ayant pas pour points-base des points unis de I_p, Φ une surface image de I_p dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes C.

Considérons un point uni A, non parfait, c'est-à-dire tel que, dans le domaine du premier ordre de A, il n'y ait que deux points, A_1, A_2, unis pour I_p. Cela implique $p > 2$ (Severi). Les courbes C passant par A, que nous désignerons par C_1, ont en ce point une multiplicité $\alpha > 0$ et leurs tangentes sont confondues avec les directions AA_1, AA_2. Désignons par C_2 les courbes C_1 assujetties à avoir en A une tangente distincte de AA_1, AA_2, et ainsi de suite. On forme ainsi une suite de systèmes linéaires $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_\nu|$ ayant en A des multiplicités d'ordres croissants et, sauf le dernier, des tangentes fixes AA_1, AA_2 en ce point. Les courbes C_ν ont en A un point p-uple à tangentes variables.

Les singularités des courbes C_1, C_2, ..., $C_{\nu-1}$ au point A et la singularité pour la surface Φ du point A' homologue de A dépendent des points unis de I_p dans les domaines successifs de A sur F. Ces singularités présentent une grande variété comme on le voit dans le cas simple où I_p est engendrée par une homographie plane. Dans le cas d'une surface algébrique quelconque, nous avons étudié deux cas.

a) Les courbes C_1 ont un point $(n+1)$-uple en A, un point n-uple en A_1 et une suite de n points simples fixes, infiniment voisins successifs, dont le premier est A_2 $(p = 2n+1)$.

Le point A' est multiple d'ordre $n+1$ pour Φ, le cône tangent en ce point étant formé d'un cône d'ordre n et d'un plan. On a $\nu = n+1$.

b) Les courbes C_1 ont en A un point double et sur chacune des branches d'origine A, une suite de p-2 points simples fixes, infiniment voisins successifs. La surface Φ possède en A' un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs $\nu - 2$ points biplanaires dont le dernier est ordinaire. On a $p = 2\nu - 1$.

Pour $p = 3$, les deux cas coïncident.

Dans le premier cas, les courbes canoniques de Φ doivent passer par A'. Il se peut que les conditions imposées à ces courbes entraînent leur non-existence. Il existe par exemple une involution rationnelle d'ordre sept, ayant trois points unis du type a) appartenant à une surface de genre trois.

Bibliographie. Bull. de la Soc. Math. de France, 1919. Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1921, 1930, 1931. Mém. de la Soc. roy. de Liége, 1929, 1930, 1931.