Académie royale de Belgique.	Koninklijke Belgische Academie.
—	—
EXTRAIT	UITTREKSEL
du *Bulletin de la Classe des Sciences*	der *Mededeelingen van de Afdeeling Wetenschappen*
5e série — T. XX — No 5 — 1934	5de Reeks — B. XX — Nr 5 — 1934

Sur les involutions du second ordre de l'espace,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

(*Troisième note.*)

Dans deux notes antérieures (1), nous avons étudié quelques transformations birationnelles involutives de l'espace. Nous nous proposons, dans cette nouvelle note, de considérer des involutions du second ordre de l'espace ayant soit un nombre fini, soit une simple infinité de points unis. Les involutions en question sont construites au moyen du système des bisécantes d'une cubique gauche et d'une polarité de l'espace, suivant un procédé imaginé par Montesano (2) et repris récemment par M. Purcell (3). Nous construisons un système linéaire de surfaces contenant deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution. Le système adjoint à ce système est composé au moyen de la congruence des bisécantes de la cubique gauche. La variété algébrique représentant l'involution contient une congruence linéaire de coniques.

1. Soient K une cubique gauche située dans un espace Σ, K′ une cubique gauche située dans un espace Σ', Θ une réciprocité entre les espaces Σ, Σ'. Supposons qu'entre les congruences formées par les bisécantes des cubiques gauches K, K′ nous ayons une correspondance birationnelle τ. Par un

---

(1) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1931, pp. 516-526, 991-1000.

(2) Sulle reciprocità birazionali nulle dello spazio. (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1° sem. 1888, pp. 583-590.)

(3) Involutorial space Cremona transformations determined by non-linear nullreciprocities (*Amer. Journ of Mathematics*, 1933, pp. 381-389). Voir aussi notre note Sur quelques transformations birationnelles involutives associées à une cubique gauche (*ibid.*, 1934, pp. 214-218).

point P de Σ passe une bisécante g de K, et à g, τ fait correspondre une bisécante g' de K'. Au point P nous faisons correspondre le point P' de g' situé sur le plan de Σ' que Θ fait correspondre en point P. Nous avons ainsi une correspondance birationnelle T entre les points P de Σ et P' de Σ', correspondance déjà considérée par Montesano et par M. Purcell.

Les équations de T s'obtiennent aisément. Soient respectivement

$$\left\| \begin{matrix} a_x & b_x & c_x \\ d_x & f_x & g_x \end{matrix} \right\| = 0, \qquad \left\| \begin{matrix} a'_x & b'_x & c'_x \\ d'_x & f'_x & g'_x \end{matrix} \right\| = 0$$

les équations de K, K'. Les bisécantes de K, K' sont respectivement représentées par

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x &= 0, & \lambda_1 d_x + \lambda_2 f_x + \lambda_3 g_x &= 0, \\ \lambda'_1 a'_x + \lambda'_2 b'_x + \lambda'_3 c'_x &= 0, & \lambda'_1 d'_x + \lambda'_2 f'_x + \lambda'_3 g'_x &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Les équations de τ s'obtiendront en considérant une correspondance birationnelle entre les champs ternaires (λ), (λ'); soient

$$\lambda'_1 : \lambda'_2 : \lambda'_3 = \varphi_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : \varphi_2 : \varphi_3. \tag{τ}$$

Soit enfin

$$\Theta(y, z) = 0 \tag{2}$$

l'équation de la réciprocité Θ.

Par un point y de Σ passe une bisécante g de K dont les paramètres λ sont déterminés par

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = b_y g_y - c_y f_y : c_y d_y - a_y g_y : a_y f_y - b_y d_y.$$

En portant ces valeurs dans les équations de τ, on obtiendra les équations de la bisécante g' de K' homologue de g; il suffira alors de résoudre les équations linéaires (1) et (2) par rapport aux z pour obtenir les équations de T.

Il est facile de voir que si les fonctions φ sont d'ordre n, T est une transformation d'ordre $4n + 1$.

2. Supposons que les espaces Σ, Σ' soient superposés, que les cubiques gauches K, K' coïncident et que Θ soit une réciprocité involutive (polarité ou système nul). Si, en outre, la transformation τ est involutive, la correspondance T sera involutive.

La transformation τ possède un certain nombre de bisécantes de K, fondamentales. Désignons ces cordes par r_1, r_2, ... r_ν et soient s_1 s_2, ... s_ν leurs multiplicités pour les surfaces que τ fait correspondre aux quadriques circonscrites à K, surfaces d'ordre $2n$ ayant K comme courbe multiple d'ordre n. On a

$$s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_\nu^2 = n^2 - 1, \qquad s_1 + s_2 + \cdots + s_\nu = 3(n-1).$$

T fait correspondre aux plans de l'espace des surfaces Φ d'ordre $4n+1$ passant $2n$ fois par K et $2s_1$, $2s_2$, ... $2s_\nu$ fois par r_1, r_2, ... r_ν. Puisque T est involutive, elle fait correspondre à une droite une courbe d'ordre $4n+1$.

Les points de K, de r_1, r_2, ... r_ν sont fondamentaux pour T. Pour qu'un point P n'appartenant pas à cette courbe ou à l'une de ces droites soit fondamental pour T, il faut que la bisécante de K que τ fait correspondre à la corde de cette courbe passant par P appartienne au plan polaire de P par rapport à Θ. Le lieu de P est une courbe Δ d'ordre $4n+4$, simple pour les surfaces Φ.

Soit g une corde de K unie pour τ. Si Θ est un système nul, tous les points de g sont unis pour T. Si Θ est une polarité par rapport à une quadrique Q, les points d'intersection de g et de Q sont unis pour T.

Plaçons-nous dans le second cas. Si τ ne possède qu'un nombre fini de droites unies, ce nombre est égal à quatre ([1]) et la transformation involutive T possède huit points unis, conformément au théorème que nous avons récemment établi ([2]).

([1]) Voir notre Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation. (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914, pp. 289-312.)

([2]) Sur les involutions du second ordre de l'espace n'ayant qu'un nombre fini de points unis (*Bulletin Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1933, pp. 186-189). Nous avons fait observer, dans notre note : « Sur quelques transformations... », citée plus haut, que les huit points unis peuvent ne pas être tous distincts.

Si, au contraire, τ possède une réglée unie, T possède une courbe lieu de points unis, intersection de cette réglée et de la quadrique Q.

3. Nous supposerons dans la suite que Θ est une polarité par rapport à une quadrique Q. Aux plans φ de l'espace, T fait correspondre des surfaces Φ d'ordre $4n + 1$. Envisageons le système complet

$$|F| = |\varphi + \Phi|.$$

Les surfaces F sont d'ordre $4n + 2$, passent $2n$ fois par K, $2s_1, 2s_2, \ldots 2s_\nu$ fois par $r_1, r_2, \ldots r_\nu$ et une fois par Δ.

Le système $|F|$ est transformé en lui-même par T. Observons qu'une surface F formée d'un plan φ et de sa transformée Φ est transformée en elle-même par T, mais ne contient pas tous les points unis de T. D'autre part, considérons un faisceau de plans φ et le faisceau de ses transformées Φ; la courbe (φ, Φ) engendre une surface F, transformée en elle-même par T, qui contient tous les points unis de T. Par suite, $|F|$ contient deux systèmes linéaires partiels, $|F_1|$, $|F_2|$, composés au moyen de l'involution I_2 engendrée par T. L'un de ces systèmes, $|F_2|$ par exemple, possède comme points-base tous les points unis de T; l'autre système, $|F_1|$, est formé de surfaces ne contenant pas tous les points unis de T.

Le genre de la courbe (φ, Φ) est égal à $4n - 1$. Les adjointes d'ordre $4n + 2 - 4$ aux surfaces F coïncident avec les adjointes d'ordre $4n + 1 - 3$ aux surfaces Φ et doivent découper, sur le plan φ, le système adjoint complet à la courbe (φ, Φ); le genre arithmétique p_a des surfaces F est donc $p_a = 4n - 1$. Les courbes communes aux surfaces F, en dehors de la base, étant en général irréductibles, les surfaces F sont régulières.

Les surfaces adjointes F', d'ordre $4n + 2 - 4 = 4n - 2$, aux surfaces F, forment un système linéaire de dimension $4n - 2$, transformé en lui-même par T. Les surfaces F' passent $2s_1 - 1, 2s_2 - 1, \ldots 2s_\nu - 1$ fois par $r_1, r_2, \ldots r_\nu$ et $2n - 1$

fois par K. Ce sont donc des surfaces réglées et le système $|F'|$ est composé au moyen de la congruence des bisécantes de K.

Nous avons vu que les surfaces F découpent, sur une courbe (φ, Φ), le système canonique complet. La courbe (φ, Φ) étant transformée en elle-même par T, il existe dans le système canonique de cette courbe deux séries linéaires partielles composées au moyen de l'involution I_2 engendrée par T. Par suite, il y a, dans $|F'|$, deux systèmes linéaires partiels $|F'_1|$, $|F'_2|$, composés au moyen de I_2 et découpant, sur une courbe (φ, Φ), les deux séries linéaires partielles dont il vient d'être question.

Lorsque la transformation T ne possède qu'un nombre fini de points unis, la courbe (φ, Φ) ne contient en général aucun point uni et l'un des systèmes, par exemple $|F'_1|$, a la dimension $2n - 2$, l'autre la dimension $2n - 1$.

Supposons que la transformation T possède une courbe unie (lieu de points unis); cette courbe a l'ordre $4m$, nécessairement multiple de quatre, et chaque courbe (φ, Φ) rencontre cette courbe unie en $4m$ points. Les dimensions des systèmes $|F'_1|$, $|F'_2|$ sont alors respectivement $2n + m - 2$ et $2n - m - 1$. Les surfaces F'_2 contiennent la courbe unie de la transformation T et sont par conséquent dégénérées en une surface fixe, lieu des cordes de K passant par la courbe unie, et une surface variable. Il est évident que les surfaces F'_1 et les parties variables des surfaces F'_2, considérées comme lieux de cordes de K, sont transformées en elles-mêmes par τ.

4. Rapportons projectivement les surfaces du système linéaire $|F_1|$, supposé de dimension ρ, aux hyperplans d'un espace linéaire S_ρ à ρ dimensions; nous obtenons dans cet espace une variété V, à trois dimensions (d'ordre $12n + 4$), image de l'involution I_2. Désignons par Ψ_1 les sections hyperplanes de V, par Ψ_2 les surfaces qui correspondent aux surfaces F_2. Supposons que la transformation T possède une courbe unie L; il lui correspond, sur V, une courbe Λ double pour la variété. Un plan φ coupe la courbe L en $4m$ points et par suite une surface $\varphi + \Phi$ a $4m$ points doubles sur cette courbe. Les surfaces F_1 rencontrent donc L en $8m$ points et la courbe Λ est d'ordre $8m$.

Les groupes de I_2 situés sur une surface F_1 forment une involution ayant $8m$ points unis et par suite les surfaces Ψ_1 ont le genre arithmétique égal à $2n + m - 1$. Aux surfaces F_1' correspondent sur V les adjointes Ψ_1' aux surfaces Ψ_1.

Aux surfaces F_2' correspondent sur V les adjointes Ψ_2' aux surfaces Ψ_2. Le système $|\Psi_2'|$ découpe, sur une surface Ψ_2, le système canonique complet de celle-ci, car le système $|F'|$ découpe, sur la surface F_2' correspondante, le système canonique complet. Le genre arithmétique des surfaces Ψ_2 est donc égal à $2n - m$.

Aux couples de cordes de K homologues dans τ correspondent sur V des coniques γ formant une congruence linéaire. Les systèmes $|\Psi_1'|$, $|\Psi_2'|$ sont composés au moyen de cette congruence linéaire.

Lorsque T possède un nombre fini de points unis, les systèmes correspondant sur V aux systèmes $|F_1'|$, $|F_2'|$ sont respectivement les adjoints de $|\Psi_1|$, $|\Psi_2|$.

5. Considérons une surface F_1 et soient P_1, P_1' deux points de cette surface formant un groupe de l'involution I_2 ; g, g' les cordes de K passant respectivement par P_1, P_1' ; P_2, P_2' les seconds points de rencontre de g, g' avec F_1 en dehors de K. Les points P_2, P_2' forment un couple de I_2. Désignons par T' la transformation qui, sur F_1, fait correspondre à un point la seconde intersection avec la surface, en dehors de K, de la corde de cette cubique passant par le point considéré; par I_2' l'involution engendrée sur F_1 par T'. L'involution I_2' possède une infinité de points unis, points de contact des cordes de K avec la surface F_1. Le produit T'T est une transformation involutive qui fait correspondre P_2' à P_1 et P_1' à P_2. L'involution d'ordre deux engendrée sur F_1 par cette transformation ne possède qu'un nombre fini de points unis si T ne possède elle-même qu'un nombre fini de points unis. Pour que les points P_1, P'_2 coïncident, il faut que les droites g, g' coïncident sans passer par un point uni pour T. Par conséquent, si T possède une courbe unie L, les cordes de K s'appuyant sur cette courbe couperont F_1 en des points unis de T'T. Si, au contraire, T ne possède qu'un nombre fini de points unis, la surface F_1 ne contiendra, en général, aucun de ces points et la transformation T'T possédera huit points unis. Dans ce cas, la surface image de l'involution engendrée sur F par T'T aura le genre arithmétique égal à $2n$.

Liége, le 28 avril 1934.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.