Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 5 juin 1937, n° 6.

Remarques sur les variétés algébriques de bigenre un,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Nous avons établi récemment le théorème suivant (1) :

Si une variété algébrique à trois dimensions possédant une surface canonique d'ordre zéro contient une involution du second ordre ayant un nombre fini de points unis, la variété image de cette involution est dépourvue de surface canonique mais possède une surface bicanonique d'ordre zéro. L'involution possède seize points unis.

On établit ainsi l'existence de variétés algébriques de bigenre un. Un exemple simple d'une telle variété s'obtient en partant de l'équation d'une surface de Steiner et en remplaçant les coordonnées dans cette équation par les premiers membres d'équations de quatre hyperquadriques linéairement indépendantes d'un espace linéaire à quatre dimensions.

Dans cette note, nous construisons, en utilisant le théorème ci-dessus rappelé, un nouveau modèle projectif d'une variété algébrique de bigenre un ($P_g = P_3 = \ldots = 0$, $P_2 = P_4 = \ldots = 1$) et nous faisons quelques remarques sur les variétés de ce type.

1. Considérons, dans un espace linéaire S_9 à neuf dimensions, la variété V_3^8 obtenue en rapportant projec-

---

(1) Sur les involutions du second ordre appartenant à certaines variétés algébriques à trois dimensions (*C. R.*, déc. 1935, pp. 1169-1170); Sur une variété algébrique à trois dimensions de bigenre un (*Bull. de l'Ac. roy. de Belgique*, 1937, pp. 93-101).

tivement les quadriques d'un espace ordinaire aux hyperplans de cet espace S_9. Les équations de cette variété s'obtiennent en écrivant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{12} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} & X_{34} \\ X_{14} & X_{24} & X_{34} & X_{44} \end{vmatrix}$$

est de caractéristique un, les $X_{ik}=X_{ki}$ étant les coordonnées des points de S_9.

Supposons que l'espace S_9 appartienne à un espace S_{11} dont nous désignerons les coordonnées ponctuelles par $X_0, X_1, X_{11}, \ldots, X_{34}$, les équations de S_9 étant $X_0=0$, $X_1=0$.

Dans S_{11}, les équations de V_3^8 représentent un cône V_5^{88}. L'intersection de ce cône avec deux hyperquadriques est une variété V_3^{32} possédant une surface canonique d'ordre zéro, car les sections hyperplanes de cette variété sont des surfaces projectivement canoniques (¹).

Désignons par $|F|$ le système des sections hyperplanes de V_3^{32}. Ce sont des surfaces régulières, de genres $p_a=p_g=11$ et de genre linéaire $p^{(1)}=33$.

2. Nous allons considérer une involution du second ordre I_2, ayant un nombre fini de points unis, appartenant à la variété V_3^{32}. A cet effet, nous partirons d'une homographie biaxiale harmonique de l'espace S_3 dont les quadriques sont représentées par les sections hyperplanes de la variété V_3^8 de S_9. Nous seront ainsi conduit à l'homographie H de S_{11}, d'équations

$$\frac{X_0'}{X_0}=\frac{X_{11}'}{X_{11}}=\frac{X_{22}'}{X_{22}}=\frac{X_{33}'}{X_{33}}=\frac{X_{44}'}{X_{44}}=\frac{X_{12}'}{X_{12}}=\frac{X_{34}'}{X_{34}}=\rho,$$

$$\frac{X_1'}{X_1}=\frac{X_{13}'}{X_{13}}=\frac{X_{14}'}{X_{14}}=\frac{X_{23}'}{X_{23}}=\frac{X_{24}'}{X_{24}}=-\rho,$$

qui transforme le cône V_5^8 en lui-même.

(¹) Sur les surfaces algébriques dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques (*Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1937, pp. 92-96, 132-135).

L'homographie H possède deux axes ponctuels : un axe σ_6, d'équations

$$X_1 = X_{13} = X_{14} = X_{23} = X_{24} = 0,$$

et un axe σ_4, d'équations

$$X_0 = X_{11} = X_{22} = X_{33} = X_{44} = X_{12} = X_{34} = 0.$$

L'axe σ_6 coupe le cône V_5^8 suivant les deux cônes du second ordre unis

$$X_{11}X_{22} - X_{12}^2 = 0, \qquad X_{33} = X_{44} = X_{34} = 0, \tag{1}$$

$$X_{33}X_{44} - X_{34}^2 = 0, \qquad X_{11} = X_{22} = X_{12} = 0. \tag{2}$$

L'axe σ_4 ne rencontre V_5^8 qu'au point dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf X_1.

Une hyperquadrique unie pour l'homographie H, ne contenant pas les axes σ_4, σ_6, a, en tenant compte des équations du cône V_5^8, une équation de la forme

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_2(X_0, X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{44}, X_{12}, X_{34}) \\ &+ aX_1^2 + X_1\varphi_1(X_{13}, X_{14}, X_{23}\ X_{24}) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

où φ_2, φ_1 sont des formes algébriques respectivement du second et du premier degré. Les termes du second degré en X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24} s'expriment, en effet, en utilisant les équations de V_5^8, au moyen de X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{44}, X_{12}, X_{34}.

Considérons une seconde hyperquadrique analogue :

$$\psi_2(X_0, X_{11}, \ldots, X_{34}) + bX_1^2 + X_1\psi_1(X_{13}, \ldots, X_{24}) = 0. \tag{4}$$

L'intersection du cône V_5^8 et des hyperquadriques (**3**), (**4**) est une variété V_3^{32}, à surface canonique d'ordre zéro, unie pour l'homographie H et sur laquelle cette homographie engendre une involution I_2 d'ordre deux. La variété V_3^{32} rencontre les cônes (**1**) et (**2**) chacun en huit points et l'involution I_2 possède seize points unis.

3. Pour obtenir un modèle projectif de la variété Ω image de l'involution, il suffit de projeter la variété V_3^{32} à partir de σ_4 sur l'espace σ_6. Les équations de la variété Ω

résulteront de l'élimination de X_1, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24} entre les équations de V_5^8 et les équations (3) et (4).

L'élimination de X_1 entre les équations (3) et (4) donne

$$(a\psi_2 - b\varphi_2)^2 + a\varphi_2\psi_1^2 + b\psi_2\varphi_1^2 - (a\psi_2 + b\varphi_2)\varphi_1\psi_1 = 0. \quad (5)$$

Comme nous l'avons déjà observé, φ_1^2, ψ_1^2, $\varphi_1\psi_1$ s'expriment, en utilisant les équations de V_5^8, en fonction de $X_{11}, X_{22}, \ldots, X_{34}$. L'équation (5) est donc une des équations de Ω. Les deux autres sont évidemment

$$X_{11}X_{22} - X_{12}^2 = 0, \qquad X_{33}X_{44} - X_{34}^2 = 0. \quad (6)$$

La variété V_3^{32} ne rencontrant pas σ_4, Ω est une variété d'ordre seize.

Des seize points de diramation de la variété Ω, huit sont donnés par

$$X_{11}X_{22} - X_{12}^2 = 0, \qquad \psi_2 = \varphi_2 = 0, \qquad X_{33} = X_{44} = X_{34} = 0,$$

les huit autres par

$$X_{33}X_{44} - X_{34}^2 = 0, \qquad \psi_2 = \varphi_2 = 0, \qquad X_{11} = X_{22} = X_{12} = 0.$$

On vérifie aisément que ces points sont quadruples pour la variété Ω.

Les sections hyperplanes Φ de la variété Ω sont les images des involutions déterminées par I_2 sur les surfaces F découpées sur V_3^{32} par les hyperplans passant par σ_4. Sur ces surfaces, ces involutions sont en général privées de points unis et les surfaces Φ sont par conséquent de genres $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 17$.

4. Considérons un hyperplan

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_{13}X_{13} + \lambda_{14}X_{14} + \lambda_{23}X_{23} + \lambda_{24}X_{24} \equiv \lambda_1 X_1 + L_1 = 0, \quad (7)$$

passant par l'espace σ_6. A la section de V_3^{32} par cet hyperplan correspond sur la variété Ω une surface Φ_0.

Pour obtenir les équations d'une surface Φ_0, il suffit d'éliminer $X_1, X_{13}, \ldots, X_{24}$ entre les équations de V_3^{32} et l'équation (7). On peut par exemple éliminer ces variables entre les équations (3) et (7) en tenant compte des équations de V_5^8, ou encore écrire

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1 L_1 \cdot X_{13} & L_1^2 \\ a & \varphi_1 \cdot X_{13} & \varphi_2 \\ b & \psi_1 \cdot X_{13} & \psi_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Les termes L_1^2, $L_1 X_{13}$, $\varphi_1 X_{13}$, $\psi_1 X_{13}$ s'expriment, en tenant compte des équations de V_5^8, en fonction de X_{11}, ..., X_{34}. On vérifie sans peine que la variété Ω appartient à l'enveloppe du système (8) lorsque les λ varient.

Sur la surface F, section de V_3^{32} par l'hyperplan (7), I_2 détermine une involution possédant seize points unis. Par conséquent, les surfaces Φ_0 sont de genres $p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 17$.

Chacun des points de diramation de Ω est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une surface rationnelle infiniment petite. Désignons par Δ_1 la somme des surfaces provenant des huit points de diramation situés dans l'espace $X_{33} = X_{44} = X_{34} = 0$, par Δ_2 la somme des autres. Nous avons la relation fonctionnelle

$$| 2\Phi | = | 2\Phi_0 + \Delta_1 + \Delta_2 |. \tag{9}$$

5. D'après ce que nous avons établi, les surfaces Φ_0 découpent sur une surface Φ le système canonique de celle-ci et les surfaces Φ découpent, sur une surface Φ_0, le système canonique de cette surface. Les surfaces Φ_0 sont donc projectivement canoniques.

Les surfaces Φ ne rencontrent pas les surfaces infiniment petites équivalentes aux points de diramation de Ω, par conséquent, nous pouvons prendre pour adjoint du système $|\Phi|$, le système

$$| \Phi' | = | \Phi_0 + \Delta_1 + \Delta_2 |.$$

Le biadjoint de $|\Phi|$ sera alors

$$| \Phi'' | = | \Phi_0' + \Delta_1 + \Delta_2 | = | \Phi |.$$

La relation fonctionnelle

$$|2\Phi'| = |\Phi'' + \Phi|$$

équivaut alors à la relation (9).

L'opération $|\Phi' - \Phi|$ est impossible et la variété Ω est dépourvue de surface canonique ($P_g = 0$). Par contre, on a

$$|\Phi'' - \Phi| = |\Delta_1 + \Delta_2|$$

et la variété Ω possède une surface bicanonique d'ordre zéro.

Les surfaces $(2i+1)$— canoniques n'existent pas et les autres sont d'ordre zéro. *La variété Ω a les genres*

$$P_g = P_3 = \cdots = P_{2i+1} = 0, \qquad P_2 = P_4 = \cdots = P_{2i} = 1.$$

6. La variété V_3^8 contient un système linéaire ∞^3, homaloïdal, de surfaces de Veronese, deux surfaces du système ayant en commun une conique.

Dans l'espace S_{11} correspond, sur le cône V_5^8, à une surface de Veronese de V_3^8, un cône du quatrième ordre rencontré par les hyperquadriques définissant V_3^{32}, suivant une surface d'ordre seize, G. On a donc, sur V_3^{32}, un système linéaire ∞^3, $|G|$, dont on voit aisément que le degré est quatre, le genre curviligne cinq et le genre arithmétique trois. Le système $|G|$ est d'ailleurs son propre adjoint, puisque V_3^{32} possède une surface canonique d'ordre zéro.

D'après la construction de l'homographie H, il existe dans $|G|$ deux faisceaux $|G_1|$, $|G_2|$ de surfaces unies pour cette homographie. Les surfaces de l'un de ces faisceaux, par exemple de $|G_1|$, passent par les points unis (1), les surfaces G_2 par les points unis (2).

Désignons par Γ_1, Γ_2 les surfaces qui correspondent aux surfaces G_1, G_2 respectivement. La courbe commune à deux surfaces Γ_1, Γ_2 est une courbe canonique de chacune de ces surfaces. Les surfaces Γ_1 ne rencontrent pas les surfaces infiniment petites composant Δ_2 et les surfaces Γ_2, les surfaces analogues composant Δ_2. Nous avons

$$|2\Gamma_1 + \Delta_1| = |2\Gamma_2 + \Delta_2|. \tag{10}$$

Nous devons poser

$$|\Gamma_1'| = |\Gamma_2 + \Delta_2|, \qquad |\Gamma_2'| = |\Gamma_1 + \Delta_1|.$$

La relation

$$|\Gamma_1'' + \Gamma_1| = |2\Gamma_1'|$$

est alors équivalente à la relation (10).

Les surfaces Γ_1, Γ_2 ont les genres $p_a = p_g = 2$, $p^{(1)} = 3$.

Sur la variété V_3^{32}, on a

$$|F| = |2G|,$$

et une surface G appartient à un espace S_7 à sept dimensions. Une surface G_1 et une surface G_2 forment l'intersection de V_3^{32} avec un hyperplan passant par σ_6, tandis que deux surfaces G_1, ou deux surfaces G_2, appartiennent à un hyperplan passant par σ_4. Il en résulte que sur la variété Ω, les sections hyperplanes d'une surface Γ_1, ou d'une surface Γ_2, sont les courbes bicanoniques de cette surface.

Mais, d'autre part, deux surfaces Γ_1 (ou Γ_2) appartiennent à une section hyperplane de Ω, par conséquent les surfaces Γ_1 et Γ_2 appartiennent à des espaces linéaires à quatre dimensions. On a donc, pour ces surfaces, $P_2 = 5$, conformément d'ailleurs à la relation $P_2 = p_a + p^{(1)}$.

Les surfaces Γ_1, Γ_2 sont des surfaces à sections hyperplanes bicanoniques, de genres $p_a = p_g = 2$, $P_2 = 5$, $p^{(1)} = 3$.

Les sections hyperplanes des surfaces G sont également les courbes bicanoniques de ces surfaces.

Liége, le 3 juin 1937.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.