EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, N° 1, 1934

Sur le plan double ayant comme courbe de diramation l'ensemble de trois coniques deux à deux bitangentes,

par LUCIEN GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

Le plan double de genres un ($p_a = P_a = 1$) dont la courbe de diramation est formée de trois coniques deux à deux bitangentes, est birationnellement équivalent à une surface de quatrième ordre possédant un point double conique et six points doubles biplanaires de seconde espèce (ayant un point double conique dans le domaine du premier ordre). Cette surface possède un groupe trirectangle de transformations birationnelles involutives en elle-même, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. La surface qui représente l'involution engendrée par ces transformations est intéressante; c'est *une surface de quatrième ordre, de genres un* ($p_a = P_4 = 1$), *possédant quatre points doubles uniplanaires ordinaires et trois points doubles coniques. Il existe sept plans touchant la surface suivant des coniques irréductibles.*

C'est la construction de cette surface qui fait l'objet de cette note. Cette surface est birationnellement équivalente à un plan double dont la courbe de diramation est formée des côtés de deux triangles homologiques, l'un des triangles étant inscrit dans l'autre.

1. Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ trois coniques deux à deux bitangentes; le triangle formé par les trois cordes de contact est autopolaire par rapport au trois coniques. Prenons ce triangle comme figure de référence; les équations des coniques peuvent s'écrire

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \ (\Gamma_1); \quad x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0, \ (\Gamma_2);$$
$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \ (\Gamma_3).$$

Remarquons que la conique Γ, d'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

est bitangente à chacune des trois coniques précédentes.

Considérons le plan double F ayant comme courbe de diramation la courbe $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$. C'est un plan double de genres un ($p_a = P_4 = 1$) birationnellement équivalent à une surface F_0, du quatrième ordre, puisqu'il existe une conique Γ tangente à la courbe de diramation en chaque point de rencontre. La surface F_0 possède un point double et l'on obtient le plan double F en projetant la surface F_0 de ce point double sur un plan; le cône tangent au point double à la surface F_0 coupe ce plan suivant la conique Γ.

L'équation de la surface F_0 peut s'écrire sous la forme

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\,x_4^2+2x_4\varphi_3(x_1,x_2,x_3)+\varphi_4(x_1,x_2,x_3)=0,$$

où φ_3, φ_4 sont des formes dont le degré est indiqué par l'indice.

En projetant la surface F_0 du point O_4 $(0,0,0,1)$ sur le plan $x_4=0$, on obtient un plan double dont la courbe de diramation est

$$\varphi_3^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\,\varphi_4=0.$$

Pour que ce plan double soit identique à F, cette courbe doit être formée des coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3. Posons

$$\psi_1\equiv a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4,$$
$$\psi_4\equiv x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_2^2x_3^2-2x_3^2x_1^2-2x_1^2x_2^2.$$

On voit aisément que l'équation de la surface F_0 s'écrit

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\,\psi_1^2+4a_4i\sqrt{2}\,x_1x_2x_3\psi_1+a_4^2\psi_4=0.$$

2. En changeant la notation, nous écrirons l'équation de la surface F_0 sous la forme

$$x_4^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4ai\sqrt{2}\,x_1x_2x_3x_4+a^2\psi_4=0.$$

Outre le point double ordinaire O_4, la surface F_0 possède six points doubles biplanaires de seconde espèce correspondant aux six points de contact des coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3 prises deux à deux. Ces six points doubles sont les intersections de la courbe

$$x_4=0, \qquad \psi_4=0$$

et de chacune des faces du tétraèdre de référence autre que $x_4=0$. Ce sont les points de contact de la courbe précédente avec ces trois plans. Les points doubles situés dans le plan $x_1=0$ ont pour coordonnées $(0,1,1,0)$ et $(0,1,-1,0)$.

Le cône tangent à la surface au premier de ces points a pour équation

$$2a^2(x_2-x_3)^2+\left(ai\sqrt{2}\,x_1+x_4\right)^2=0;$$

il est formé de deux plans passant par la droite

$$x_2 - x_3 = 0, \qquad ai\sqrt{2}x_1 + x_4 = 0$$

et cette droite coupe la surface en quatre points confondus au point considéré; la singularité de la surface en ce point se compose donc de deux points doubles infiniment voisins successifs (point double biplanaire de seconde espèce).

Le cône tangent à la surface au point $(0, 1, -1, 0)$ a pour équation

$$2a^2(x_2 + x_3)^2 + \left(ai\sqrt{2}x_1 - x_4\right)^2 = 0$$

et donne lieu à des conclusions analogues. On arrive également à des conclusions identiques pour les autres points doubles biplanaires $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, -1, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, -1, 0, 0)$ de la surface.

3. La surface F_0 possède plusieurs transformations birationnelles en elle-même. En premier lieu la transformation involutive

$$\left.\begin{aligned} \rho x_1' &= x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \\ \rho x_2' &= x_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \\ \rho x_3' &= x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \\ \rho x_4' &= -x_4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 4ai\sqrt{2}\,x_1x_2x_3, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

qui donne naissance au plan double F.

En second lieu, trois transformations involutives

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = -x_1 : x_2 : x_3 : -x_4, \qquad (2)$$

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : -x_2 : x_3 : -x_4, \qquad (3)$$

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : -x_3 : -x_4, \qquad (4)$$

formant un groupe trirectangle.

En troisième lieu la transformation de période trois

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_2 : x_3 : x_1 : x_4 \qquad (5)$$

et les produits des transformations précédentes prises deux à deux.

Les transformations (2) à (5) n'ont qu'un nombre fini de points unis.

4. Nous allons construire une surface image de l'involution I_2 engendrée par la transformation (2). A cet effet, observons que les quadriques

$$\lambda_{11}x_1^2 + \lambda_{14}x_1x_4 + \lambda_{44}x_4^2 + \lambda_{22}x_2^2 + \lambda_{23}x_2x_3 + \lambda_{33}x_3^2 = 0 \qquad (6)$$

sont transformées en elles-mêmes par l'homographie biaxiale harmonique (2). Rapportons projectivement ces quadriques aux hyperplans d'un espace S_5 en posant

$$\frac{X_{11}}{x_1^2} = \frac{X_{14}}{x_1 x_4} = \frac{X_{44}}{x_4^2} = \frac{X_{22}}{x_2^2} = \frac{X_{23}}{x_2 x_3} = \frac{X_{33}}{x_3^2}.$$

A la surface F_0 correspond la surface Φ d'équations

$$\left.\begin{aligned} &X_{14}^2 - X_{11}X_{44} = 0, \qquad X_{23}^2 - X_{22}X_{33} = 0, \\ &X_{44}(X_{11} + X_{22} + X_{33}) + 4ai\sqrt{2}X_{14}X_{23} \\ &+ a^2(X_{11}^2 + X_{22}^2 + X_{33}^2 - 2X_{23}^2 - 2X_{11}X_{22} - 2X_{11}X_{33}) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Les points unis de l'involution I_2 sont les points doubles $O_4\,(0, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, -1, 0)$ et les deux points simples $(ai, 0, 0, 1)$, $(ai, 0, 0, -1)$.

Aux quadriques passant par O_4 correspondent les hyperplans de S_5 passant par le point O_{44}, dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf X_{44}. Ce point est double pour la surface Φ. La projection de Φ à partir de ce point sur l'hyperplan $X_{44} = 0$ a pour équations

$$\left.\begin{aligned} &X_{23}^2 - X_{22}X_{33} = 0 \\ &X_{14}^2(X_{11} + X_{22} + X_{33}) + 4ai\sqrt{2}X_{11}X_{14}X_{23} \\ &+ a^2X_{11}(X_{11}^2 + X_{22}^2 + X_{33}^2 - 2X_{23}^2 - 2X_{11}X_{22} - 2X_{11}X_{33}) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Le cône tangent à Φ au point O_{44} a pour équations

$$X_{11} = 0, \qquad X_{22} + X_{33} = 0, \qquad X_{23}^2 - X_{22}X_{33} = 0$$

et se compose donc de deux plans passant par la droite $O_{44}O_{14}$, le point O_{14} ayant toutes ses coordonnées nulles, sauf X_{14}. Par suite, au point de Φ infiniment voisin de O_{14} correspond, sur la surface (7), le point O'_{14} dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf X_{14}. Ce point est double conique pour la surface (7), le cône tangent étant

$$X_{11} + X_{22} + X_{33} = 0, \qquad X_{23}^2 - X_{22}X_{33} = 0.$$

La singularité de la surface Φ au point O_{44} est donc un point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double conique (point biplanaire de seconde espèce).

Désignons par A le point de diramation de Φ qui correspond au point $(0, 1, 1, 0)$ de F_0; le point A a pour coordonnées $X_{11} = X_{14}$

$= X_{44} = 0$, $X_{22} = X_{23} = X_{33}$. Il est double pour Φ et le cône tangent en ce point à la surface a pour équations

$$X_{14}^2 - X_{11}X_{44} = 0, \quad X_{22} + X_{33} - 2X_{23} = 0,$$
$$2a^2X_{11} - X_{44} - 2ai\sqrt{2}X_{14} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(X_{14} + ai\sqrt{2}X_{11}\right)^2 = 0, \quad X_{22} + X_{33} - 2X_{23} = 0, \quad 2a^2X_{11} + X_{44} = 0.$$

Le point A est double uniplanaire pour Φ.

Le point de diramation B, de coordonnées $X_{11} = X_{14} = X_{44} = 0$, $X_{22} = -X_{23} = X_{33} = 1$, qui correspond au point $(0, 1, -1, 0)$ de F_0, est également un point double uniplanaire de Φ, le cône tangent à cette surface en ce point se réduisant à

$$\left(X_{14} - ai\sqrt{2}X_{11}\right)^2 = 0, \quad X_{22} + X_{33} + 2X_{23} = 0, \quad 2a^2X_{11} + X_{44} = 0.$$

Les deux autres points de diramation de la surface Φ sont des points doubles coniques.

5. Aux homographies (3), (4) correspond une homographie involutive transformant la surface Φ en elle-même. Cette homographie a pour axes

$$X_{11} = X_{22} = X_{33} = X_{44} = 0, \qquad X_{14} = X_{23} = 0.$$

Pour avoir un modèle projectif de la surface Φ_0, image de l'involution engendrée par cette homographie, il suffit de projeter la surface Φ à partir du premier axe de l'homographie sur le second. La surface Φ_0 est d'ailleurs l'image de l'involution d'ordre quatre engendrée par les transformations (2), (3), (4) sur la surface F_0. En posant

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 : x_4^2,$$

on obtiendra donc l'équation de Φ_0,

$$32a^2X_1X_2X_3X_4 + [X_4(X_1 + X_2 + X_3) + a^2\psi_2]^2 = 0.$$

où l'on a posé

$$\psi_2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 2X_2X_3 - 2X_3X_1 - 2X_1X_2.$$

Aux points A, B de Φ correspond, sur Φ_0, un point A_1 (0, 1, 1, 0), double uniplanaire de Φ_0, de même nature que A, B pour Φ.

La surface Φ_0 possède quatre points doubles uniplanaires ordinaires, à savoir :

a) Le point O'_4 (0, 0, 0, 1), le plan tangent en ce point étant le plan

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0.$$

Les points doubles infiniment voisins de O'_4 sont situés sur les intersections de ce plan et des plans $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$.

b) Les points $A_1(0, 1, 1, 0)$, $A_2(1, 0, 1, 0)$, $A_3(1, 1, 0, 0,)$. Le plan tangent au premier de ces points, par exemple, a pour équation

$$2a^2 X_1 + X_4 = 0.$$

Les points doubles de la surface infiniment voisins de A_1 sont situés sur les droites $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ et $X_1 = X_4 = 0$.

La surface Φ_0 possède en outre trois points doubles coniques $A'_1(1, 0, 0, -a^2)$, $A'_2(0, 1, 0, -a^2)$, $A\ (0, 0, 1, -a^2)$. Le cône tangent à la surface en A'_1, par exemple, a pour équation

$$[a^2(X_1 - 3X_2 - 3X_3) + X_4]^2 - 32a^4 X_2 X_3 = 0.$$

De plus, la surface Φ_0 touche les plans du tétraèdre de référence suivant des coniques irréductibles. Enfin, la surface Φ_0 représentant une involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface F_0 de genres un, est elle-même de genres un.

Il est facile de voir, et l'on aurait du reste pu l'établir directement en partant du plan double F, que la surface Φ_0 est birationnellement équivalente au plan double ayant comme courbe de diramation l'ensemble des six droites

$$X_1 X_2 X_3 (-X_1 + X_2 + X_3)(X_1 - X_2 + X_3)(X_1 + X_2 - X_3) = 0.$$

On peut alors voir que les plans

$$-X_1 + X_2 + X_3 = 0, \quad X_1 - X_2 + X_3 = 0, \quad X_1 + X_2 - X_3 = 0$$

touchent la surface Φ_0 le long de coniques irréductibles. Le premier de ces plans, par exemple, touche Φ_0 le long de la conique

$$-X_1 + X_2 + X_3 = 0, \qquad 2a^2 X_2 X_3 + X_1 X_4 = 0.$$

Liége, le 13 janvier 1934.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles.