Académie royale de Belgique.

—

EXTRAIT
du *Bulletin de la Classe des Sciences*
5e série — T. XIX — Nos 10-11 — 1933

Koninklijke Belgische Academie.

—

UITTREKSEL
der *Mededeelingen van de Afdeeling Wetenschappen*
5de Reeks — B. XIX — Nrs 10-11 — 1933

Sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques irrégulières,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Nous nous proposons d'établir, dans cette note, une propriété des correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques irrégulières (1). Nous établissons le théorème suivant :

Si une surface algébrique F', *d'irrégularité* q', *dépourvue de faisceau irrationnel de courbes, contient une involution cyclique d'ordre premier* p, *privée de points unis, ayant pour image une surface algébrique* F, *d'irrégularité* q $(0 < q \leq q')$, *également privée de faisceau irrationnel de courbes, les variétés de Picard* V, V' *de* F, F' *possèdent les propriétés suivantes :*

a) *La variété* V *contient une involution d'ordre* p *dont l'image est une variété abélienne appartenant à* V' ; *ou*

b) *la variété* V' *contient une variété abélienne birationnellement identique à* V ; *ou*

c) *la variété* V *contient* p *involutions d'ordre* p *dont les images sont des variétés abéliennes de* V', *ne se rencontrant pas deux à deux.*

Ce théorème contient comme cas particulier celui que nous avions établi autrefois (2) sur les correspondances rationnelles

(1) Pour les propriétés des surfaces algébriques utilisées ici, nous renvoyons aux *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* de M. Enriques (rédigées par M. Campedelli, Padoue, 1932), et à l'article de MM. Castelnuovo et Enriques, *Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus*, t. III, fasc. 6. Leipzig, 1915.

(2) Sur les correspondantes rationnelles entre deux surfaces algébriques ayant même irrégularité. (*Bull. de l'Acad. roumaine*, 1927.)

entre deux surfaces ayant même irrégularité. Observons que l'on déduit immédiatement de nos résultats celui-ci : *Si une surface algébrique irrégulière* F′ *contient une involution cyclique d'ordre premier* p *ayant pour image une surface de même irrégularité* F *et ayant même variété de Picard que* F′, *le diviseur de Severi de la surface* F *est multiple de* p.

1. Soient F, F′ deux surfaces algébriques d'irrégularités q, q', liées par une correspondance rationnelle $(1, p)$, où p est un nombre premier. Aux points de F correspondent, sur F′, des groupes de p points formant une involution I_p d'ordre p, que nous supposerons cyclique et dépourvue de points unis. On a d'ailleurs $q \leq q'$ et nous supposerons $q > 0$.

Considérons sur F un système linéaire $|C|$, de genre π et de degré n, régulier et de dimension au moins égale à l'unité. Si p_a désigne le genre arithmétique de F, la dimension de $|C|$ est égale à $p_a + n - \pi + 1 = r$.

Aux courbes C correspondent sur F′ des courbes C′ de degré pn et de genre $p(\pi - 1) + 1$, formant un système linéaire non spécial de dimension, d'après le théorème de Riemann-Roch,

$$r' \geq p'_a + pn - p(\pi - 1),$$

p'_a étant le genre arithmétique de F′. Nous avons [1]

$$p(p_a + 1) = p'_a + 1;$$

d'où

$$r' \geq p(p_a + n - \pi + 1) + p - 1 \quad \text{ou} \quad pr + p - 1.$$

Le système $|C'|$ est donc plus ample que $|C|$ et il existe par suite, dans $|C'|$, un certain nombre ν de systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_p. A chacun de ces systèmes correspond, sur F, un système linéaire complet de degré n et de genre π. L'un des systèmes ainsi obtenus est

(1) Voir Severi, Sulle relazioni che legano... (*Rend. Ist. Lomb.*, 1903), ou, pour le cas particulier envisagé ici, notre travail Sur les Involutions... (*Bull. Soc. math. France*, 1919).

évidemment $|C|$; nous désignerons les autres par $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_{\nu-1}|$. On a d'ailleurs $\nu \leq p$ et

$$r + r_1 + \cdots + r_{\nu-1} + \nu = r' + 1,$$

$r_1, r_2, \ldots, r_{\nu-1}$ étant les dimensions des systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_{\nu-1}|$.

Si λ est un entier positif, le système $|\lambda C|$ est régulier et a pour transformé, sur la surface F', le système $|\lambda C'|$. Le système $|C|$ étant supposé irréductible, $|\lambda C|$ est régulier, $|C'|$ est irréductible et l'on peut prendre λ assez élevé pour que $|\lambda C'|$ soit régulier. D'autre part, on peut prendre λ assez élevé pour que ν soit égal à p. Supposons choisie une valeur de λ satisfaisant à ces conditions et reprenons nos anciennes notations, c'est-à-dire continuons à appeler $|C|$ un système pour lequel $|C'|$ soit régulier et tel que $\nu = p$. On a alors

$$r + r_1 + \cdots + r_{p-1} + p = r' + 1 = pr + p;$$

d'où, puisque $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ sont au moins égaux à r,

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_{p-1} = r.$$

Les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$ ..., $|C_{p-1}|$ sont également réguliers.

Observons encore que l'on a

$$|pC| = |pC_1| = \cdots = |pC_{p-1}|.$$

2. On peut trouver sur une surface algébrique irrégulière un système continu complet, formé de ∞^q systèmes linéaires réguliers, q étant l'irrégularité de la surface ([1]). Supposons donc que $|C|$ appartienne à un système continu complet $\{C\}$, ∞^q, formé de systèmes linéaires complets. Les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_{p-1}|$ engendrent alors des systèmes continus complets, ∞^q, $\{C_1\}$, $\{C_2\}$, ..., $\{C_{p-1}\}$ et l'on a

$$\{pC\} = \{pC_1\} = \cdots = \{pC_{p-1}\}.$$

([1]) Voir F. SEVERI, Nuovi contributi alla teoria dei sistemi continui di curve... (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1° sem. 1916.)

Deux cas peuvent se présenter :

1° Le diviseur de Severi [1] σ de la surface F est premier avec p. Alors l'égalité fonctionnelle précédente entraîne comme conséquence que les systèmes $\{C\}$, $\{C_1\}$, .. , $\{C_{p-1}\}$ sont confondus en un seul.

2° Le diviseur de Severi σ de la surface F est un multiple de p. Il existe alors $p - 1$ systèmes continus distincts et distincts de $\{C\}$, $\{\overline{C}_1\}$, ..., $\{\overline{C}_{p-1}\}$ tels que les courbes p C, $p\,\overline{C}_1$, ..., $p\,\overline{C}_{p-1}$ appartiennent à un même système continu. A ces systèmes correspondent, sur F', des systèmes continus $\{\overline{C}'_1\}$, ..., $\{\overline{C}'_{p-1}\}$ tels que les courbes $p\,\overline{C}'_1$, ..., $p\,\overline{C}'_{p-1}$ appartiennent au système $\{p\ C'\}$. Le diviseur σ' de F' est au moins égal à σ. Si σ' est premier avec p, les $p - 1$ systèmes coïncident avec $\{C'\}$. Si σ' est multiple de p, ils peuvent être distincts.

3. Désignons par V, V' les variétés de Picard attachées aux surfaces F, F' et supposons que celles-ci soient dépourvues de faisceaux irrationnels de courbes.

Plaçons-nous en premier lieu dans le cas où σ est premier avec p. A un système linéaire $|C|$ correspondent $p - 1$ autres systèmes linéaires $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_{p-1}|$ du système $\{C\}$ et le même groupe de p systèmes linéaires de $\{C\}$ est évidemment obtenu en partant de l'un quelconque de ses p systèmes. On a donc, sur la variété Picard V, dont les points correspondent biunivoquement aux systèmes linéaires de $\{C\}$, une involution J_p d'ordre p.

A chacun des groupes de p systèmes linéaires de $\{C\}$ qui viennent d'être considérés correspond un système linéaire $|C'|$, appartenant à un système continu complet, $\{C'\}$, $\infty^{q'}$, puisque $|C'|$ est régulier. Par conséquent, à chaque groupe de l'involution J_p de V, correspond un point de la variété V' et ces points

[1] Severi, La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique (*Annales de l'Éc. norm. sup.*, 1908). Voir aussi *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1910, t. 30.

engendrent une variété algébrique W ayant, comme V, la dimension q.

La variété W possède au plus q intégrales de différentielles totales de première espèce, puisqu'elle représente une involution appartenant à une variété V possédant exactement q intégrales de ce type. D'autre part, si $|A|$, $|B|$ sont deux systèmes déterminés choisis dans $\{C\}$, le système

$$|D| = |C + A - B|$$

appartient également à $\{C\}$ et la correspondance définie par ce procédé entre les systèmes $|C|$, $|D|$ de $\{C\}$ donne une des ∞^q transformations birationnelles du groupe transitif de V. L'égalité fonctionnelle donne donc, sur F',

$$|D'| = |C' + A' - B'|,$$

les systèmes $|A'|$, $|B'|$, $|D'|$ correspondant à $|A|$, $|B|$, $|D|$. Par suite, on a également un groupe transitif ∞^q de transformations birationnelles de W en elle-même. Il en résulte, d'après un théorème classique de M. Picard, que W est une variété abélienne et possède exactement q intégrales de différentielles totales de première espèce.

Ainsi donc, lorsque σ est premier avec p, il existe sur V une involution d'ordre p dont l'image est une variété abélienne ∞^q appartenant à V'.

4. Passons au cas où σ étant multiple de p, σ' est premier avec p. Alors, les systèmes $\{\overline{C}_1\}, \ldots, \{\overline{C}_{p-1}\}$ coïncident, dans un certain ordre, avec les systèmes $\{C_1\}, \ldots, \{C_{p-2}\}$. Au système de $|C|$ de $\{C\}$ correspond sur F' un système $|C|$ de $\{C'\}$, mais à ce système ne correspond que le système $|C|$ de $\{C\}$. Il existe donc, sur la variété V', une variété W' birationnellement identique à V.

Envisageons enfin le dernier cas, où σ et σ' sont deux multiples de p.

---

(1) CASTELNUOVO, Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare. (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1° sem. 1905.)

Si les p systèmes $\{C'\}$, $\{\overline{C}'_1\}$, ..., $\{\overline{C}'_{p-1}\}$ sont distincts, aucun des systèmes $\{\overline{C}_1\}$, ..., $\{\overline{C}_{p-1}\}$ ne pourra être confondu avec un des systèmes $\{C_1\}$, ..., $\{C_{p-1}\}$. Par conséquent, ces $p - 1$ derniers systèmes coïncideront avec $\{C\}$. Il existera, comme dans le premier cas, une involution J_p appartenant à V et dont l'image sera une variété abélienne W appartenant à V'.

Supposons au contraire que les systèmes $\{\overline{C}'_1\}$, ..., $\{\overline{C}'_{p-1}\}$ coïncident avec $\{C'\}$. Alors les systèmes $\{\overline{C}'\}$, ..., $\{\overline{C}'_{p-1}\}$ peuvent coïncider, dans un certain ordre, avec les systèmes $\{C_1\}$, ... $\{C_{-p1}\}$, et il existe sur V' une variété W' birationnellement identique à V. Si le contraire a lieu, les systèmes $\{C_1\}$, ... coïncident avec $\{C\}$. Le raisonnement fait sur $\{C\}$ peut se répéter pour chacun des systèmes $\{\overline{C}_1\}$, ..., et il existe, sur V, p involutions d'ordre p, analogues à J_p, ayant pour image p variétés abéliennes W appartenant à V'. Deux de ces p variétés W ne pourront avoir de point commun, car un système linéaire de $\{C'\}$ ne peut provenir de systèmes linéaires appartenant à des systèmes continus distincts de F.

Parmi les $\infty^{q'}$ transformations de V' en elle-même, formant le groupe transitif de cette variété, il y en a ∞^q qui transforment chacune des p variétés W en elle-même et qui proviennent des transformations de V. Par conséquent, les p variétés W appartiendront à un des deux systèmes d'imprimitivité pour le groupe transitif $\infty^{q'}$ de V'.

Liége, le 22 août 1933.

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, 112, rue de Louvain, Bruxelles