Académie royale de Belgique.

EXTRAIT
du *Bulletin de la Classe des Sciences*
5e série — T. XIX — Nos 10-11 — 1933

Koninklijke Belgische Academie.

UITTREKSEL
der *Mededeelingen van de Afdeeling Wetenschappen*
5de Reeks — B. XIX — Nrs 10-11 — 1933

Sur certaines involutions cycliques, dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique,

par LUCIEN GODEAUX, Corespondant de l'Académie.

Dans une note antérieure [1], nous avons considéré les involutions cycliques, dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique régulière. En particulier, nous avons montré que si p_a est le genre arithmétique de la surface et si l'involution est d'ordre $p = p_a + 1$, p étant premier, une surface image de l'involution est dépourvue de courbes canoniques, mais possède des courbes bicanoniques. C'est ce qui fait d'ailleurs l'intérêt de la question. Nous allons reprendre cette étude et obtenir des résultats plus précis.

1. Soit F une surface algébrique régulière de genre arithmétique $p_a > 1$ et de genre linéaire $p^{(1)} > 1$, transformée en elle-même par une transformation birationnelle T, de période $p = p_a + 1$, dépourvue de points unis. Nous supposons que, si $p_a > 2$, le système canonique $|C|$ de F n'est pas composé au moyen d'un faisceau. Le nombre p est ici un entier positif quelconque.

Une surface Φ, image de l'involution I_p engendrée sur F par T, est régulière; son genre arithmétique π_a et son genre linéaire $\pi^{(1)}$ sont liés à p_a, $p^{(1)}$ par les relations

$$p_a + 1 = p(\pi_a + 1), \qquad p^{(1)} - 1 = p(\pi^{(1)} - 1).$$

[1] Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique régulière (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 1932, pp. 672-679). Voir également Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux (*Rend. R. Accad. dei Lincei*, déc. 1931); Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro, dont le genre linéaire est égal à deux. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 1933, pp. 26-37.)

On a donc $\pi_a = 0$ et la surface Φ est dépourvue de courbes canoniques. Par suite, le système canonique $| C |$ de F ne peut être composé au moyen de l'involution I_p. Cela étant, le système $| C |$ contiendra un certain nombre ν ($\nu > 1$) de systèmes linéaires partiels $| C_1 |, | C_2 |, \ldots, | C_\nu |$ composés au moyen de I_p. Nous désignerons par $| \Gamma_1 |, | \Gamma_2 |, \ldots, | \Gamma_\nu |$ les systèmes linéaires, complets, qui leur correspondent sur Φ. Si $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ sont les dimensions de ces systèmes, on a, d'après la théorie des homographies,

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_\nu = p_a - \nu = p - \nu - 1\,;$$

d'où $\nu \leq p - 1$.

Les systèmes $| \Gamma_1 |, | \Gamma_2 |, \ldots, | \Gamma_\nu |$ sont de genre $\pi^{(1)}$ et de degré $\pi^{(1)} - 1$.

De $p^{(1)} > 1$, on déduit $\pi^{(1)} > 1$, et par suite il existe sur Φ un système bicanonique $| \Delta |$ de dimension $\Pi_2 - 1 = \pi^{(1)} - 1$.

2. Les courbes bicanoniques Δ découpent, sur une courbe Γ_1, des groupes de $2\pi^{(1)} - 2$ points qui ne peuvent être des groupes canoniques de Γ_1, car $| \Delta |$ serait adjoint à $| \Gamma_1 |$, ce qui est impossible. Ces groupes forment donc, sur Γ_1, une série linéaire de dimension $\pi^{(1)} - 2$. Comme $| \Delta |$ a la dimension $\pi^{(1)} - 1$, il existe au moins une courbe Δ comprenant la courbe Γ_1 considérée. Aux courbes Δ correspondent sur F des courbes du système bicanonique $| 2C |$; par conséquent à la courbe $\Delta - \Gamma_1$ correspond une courbe $2C - C_1$ qui est transformée en elle-même par T et appartient à $| C |$. C'est donc une des courbes $C_1, C_2, \ldots,$ ou C_ν. On peut répéter le raisonnement précédent pour chacune des courbes $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu$.

L'adjoint $| \Gamma'_1 |$ de $| \Gamma_1 |$ découpe sur une courbe Γ_1 la série canonique d'ordre $2\pi^{(1)} - 2$ et de dimension $\pi^{(1)} - 1$ de cette courbe. Comme aucune des courbes Γ'_1 ne peut contenir une des courbes Γ_1 comme partie, la dimension de $| \Gamma'_1 |$ est au plus égale à $\pi^{(1)} - 1$. D'autre part, $| \Gamma'_1 |$ a le genre $3\pi^{(1)} - 1$ et le degré $4\pi^{(1)} - 4$; sa dimension est donc au moins égale à $\pi^{(1)} - 1$ d'après le théorème de Riemann-Roch. On en conclut que $|\Gamma'_1|$ a la dimension $\pi^{(1)} - 1$. Aux courbes Γ'_1 correspondent, sur F, des courbes du système bicanonique $|2C|$, adjoint à $|C|$.

Les courbes Γ'_1 découpent, sur une courbe Γ_2, des groupes de $2\pi^{(1)} - 2$ points qui ne peuvent être des groupes canoniques et qui, par suite, appartiennent à une série de dimension $\pi^{(1)} - 2$. Par suite, il y a au moins une courbe Γ'_1 comprenant comme partie une courbe Γ_2.

On peut faire le même raisonnement pour les courbes $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu$ et ensuite pour chacun des systèmes $|\Gamma'_2|, \ldots, |\Gamma'_\nu|$ adjoints respectivement à $|\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_\nu|$.

De tout ceci il résulte que toute courbe formée par la réunion de deux courbes des systèmes $|\Gamma_1|, \ldots, |F_\nu|$, distincts ou non, appartient à l'un des $\nu + 1$ systèmes $|\Delta|$, $|\Gamma'_1|$, ..., $|\Gamma'_\nu|$.

3. Le système bicanonique $|2C|$ de F n'est pas composé en moyen de I_p et contient un certain nombre de systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_p. Nous connaisnaissons $\nu + 1$ de ces systèmes; ce sont les transformés de $|\Delta|$, $|\Gamma'_1|, \ldots, |\Gamma_\nu|$; ils ont tous la même dimension $\pi^{(1)} - 1$.

S'il en existait un autre, il lui correspondrait sur Φ un système $|K|$ de degré $4\pi^{(1)} - 4$ et de genre $3\pi^{(1)} - 2$; sa dimension serait donc au moins égale, d'après le théorème de Riemann-Roch, à $\pi^{(1)} - 1$; ses courbes découperaient, sur une courbe Γ_1, par exemple, des groupes non canoniques de $2\pi^{(1)} - 2$ points, appartenant à une série de dimension $\pi^{(1)} - 2$. Par suite, il y aurait au moins une courbe K contenant cette courbe Γ_1 comme partie. La différence $K - \Gamma_1$ serait nécessairement une courbe $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, ou Γ_ν et l'on parviendrait à une absurdité.

Par conséquent, le système $|2C|$, de dimension $P_2 - 1 = p_a + p^{(1)} - 1$, contient $\nu + 1$ systèmes linéaires de dimension $\pi^{(1)} - 1$, composés au moyen de I_p. D'après la théorie des homographies, on a

$$(\nu + 1)(\pi^{(1)} - 1) + \nu + 1 = p_a + p^{(1)} = p - 1 + p(\pi^{(1)} - 1) + 1 = p\pi^{(1}$$

On en conclut $\nu = p - 1$ et par suite $r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu = 0$.

Le système canonique $|C|$ *de* F *contient donc* p — 1 *courbes isolées, transformées en elles-mêmes par* T.

4. Les $p - 1$ courbes $2\Gamma_1$, $2\Gamma_2, \ldots, 2\Gamma_{p-1}$ appartiendront à $p - 1$ des systèmes $|\Delta|$, $|\Gamma'_1|, \ldots, |\Gamma'_{p-1}|$. Il y aura donc un de ces systèmes qui ne comprendra aucune des courbes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{p-1}$ comptée deux fois; en numérotant convenablement ces courbes, on pourra toujours supposer que le système en question comprend les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_3 + \Gamma_4, \ldots, \Gamma_{p-2} + \Gamma_{p-1}$, ce qui implique que p soit impair. Comme le système $|\Gamma'_i|$ ne peut comprendre la courbe Γ_i, les courbes précédentes appartiendront nécessairement à un système bicanonique $|\Delta|$ et l'on aura

$$\Delta \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_4 \equiv \cdots \equiv \Gamma_{p-2} + \Gamma_{p-1}.$$

Trois des courbes précédentes, par exemple $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_3 + \Gamma_4$, $\Gamma_5 + \Gamma_6$, ne peuvent appartenir à un même faisceau, car alors il y aurait au moins un faisceau contenant au moins trois des courbes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_6$. Un tel faisceau serait transformé en lui-même par T, et comme trois de ses courbes sont transformées en elles-mêmes par T, toutes les courbes du faisceau jouiraient de la même propriété, ce qui est en contradiction avec ce qui précède. Il en résulte que les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-2} + \Gamma_{p-1}$ sont linéairement indépendantes et que la dimension de $|\Delta|$ est au moins égale à $^1/_2\,(p - 1) - 1$.

L'ordre de l'involution I_p *est impair et le bigenre de la surface* Φ *est au moins égal à* $^1/_2\,(p - 1)$.

On a d'ailleurs

$$p\Gamma_1 \equiv p\Gamma_2 \equiv \cdots \equiv p\Gamma_{p-1}$$

et le diviseur de Severi de Φ est multiple de p.

5. Nous allons maintenant établir une formule générale sur les surfaces non rationnelles de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} > 1$, $P_2 = p^{(1)}$ (cfr *Rosenblatt*, C. R., juin 1912).

Partons de la formule de Picard

$$\rho + \rho_0 = I + 4(p_g - p_a) + 2,$$

où ρ est le nombre-base de la surface, ρ_0 le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce, I l'invariant de Zeuthen-Segre, et de la relation

$$I + p^{(1)} = 12p_a + 9.$$

Dans le cas $p_a = p_g = 0$, on en déduit

$$\rho + \rho_0 = 11 - p^{(1)}.$$

On a $\rho \geq 1$, $\rho_0 \geq 0$; donc $p^{(1)} \leq 10$.

Le genre linéaire d'une surface non rationnelle de genres arithmétique et géométrique nuls est au plus égal à dix. S'il est supérieur à l'unité, le bigenre est au plus égal à dix.

6. La recherche de surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = p^{(1)} > 1$ pourra être effectuée en se basant sur les résultats précédents. On sera ramené à la détermination d'une surface régulière de genre $p_a = p - 1$, admettant une transformation birationnelle en elle-même, privée de points unis, dont la période p sera au plus égale à $2P_2 + 1$.

Ainsi, pour déterminer une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = p^{(1)} = 4$, on aura $p \leq 9$; d'où $p = 3, 5, 7$ ou 9, car p doit être impair. La surface F correspondante sera de genre $p_a = 2, 4, 6$ ou 8. Examinons le dernier cas, $p = 9$. La surface F est donc de genre $p_a = 8$ et $p^{(1)} = 28$.

La transformation T^3 engendre sur F une involution cubique privée de points unis. Soit F* une surface image de cette involution; elle a le genre arithmétique deux et le genre linéaire 10. D'après les résultats obtenus dans notre note citée au début, le système canonique $|C|$ de F contient trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_3 engendrée par T^3 : un faisceau $|C_0|$ qui correspond au système canonique $|C_0^*|$ de F^* et deux réseaux $|C_{01}|$, $|C_{02}|$ auxquels correspondent deux réseaux $|C_{01}^*|$, $|C_{02}^*|$ de F^*. Le faisceau $|C_0|$ contient les deux courbes C_1, C_2, par exemple, le réseau $|C_{01}|$ les courbes C_3, C_5, C_7 et le réseau $|C_{02}|$, les courbes C_4, C_6, C_8,

Sur la surface F^* il correspond à I_9 une involution cyclique I_3', dépourvue de points unis, dont Φ est l'image. Si nous appliquons à la correspondance entre Φ et F^* les résultats trouvés plus haut, nous trouvons

$$|\Delta| = |\Gamma_1 + \Gamma_2|, \qquad |\Gamma_1'| = |2\Gamma_2|, \qquad |\Gamma_2'| = |2\Gamma_1|.$$

Il est aisé de voir comment se distribuent les courbes $\Gamma_3, \ldots, \Gamma_8$ dans les systèmes précédents, en tenant compte du fait que $|C_{01}^*|$, $|C_{02}^*|$ sont des systèmes distincts. On trouve

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_5 + \Gamma_6 \equiv \Gamma_7 + \Gamma_8, \\ \Gamma_1' &\equiv 2\Gamma_2 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_6 \equiv \Gamma_5 + \Gamma_8 \equiv \Gamma_7 + \Gamma_4, \\ \Gamma_2' &\equiv 2\Gamma_1 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_8 \equiv \Gamma_5 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_7 + \Gamma_6. \end{aligned}$$

On a

$$\Gamma_1'' \equiv \Gamma_3' + \Gamma_6 \equiv \Gamma_1 + \Delta \equiv \Gamma_1 + \Gamma_5 + \Gamma_6;$$

de même, on trouve

$$\begin{aligned} \Gamma_2'' &\equiv \Gamma_3' + \Gamma_8 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_7 + \Gamma_8, \\ \Gamma_3' &\equiv \Gamma_1 + \Gamma_5 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_7. \end{aligned}$$

D'une manière analogue, on trouvera

$$\Gamma_4' \equiv \Gamma_1 + \Gamma_8 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_6, \quad \Gamma_5' \equiv \Gamma_1 + \Gamma_7 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_3, \quad \Gamma_6' \equiv \Gamma_1 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_8,$$
$$\Gamma_7' \equiv \Gamma_1 + \Gamma_3 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_5, \quad \Gamma_8' \equiv \Gamma_1 + \Gamma_6 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4.$$

On complétera sans difficulté les systèmes $|\Gamma_3'|, \ldots, |\Gamma_8'|$. Observons qu'aux courbes Δ, Γ_1', Γ_2' correspondent, sur F^*, des courbes du système $|2C_0^*| = |C_{01}^* + C_{02}^*|$; aux courbes Γ_3', Γ_5', Γ_7', des courbes du système $|2C_{01}^*| = |C_0^* + C_{02}^*|$; enfin aux courbes Γ_4', Γ_6'. Γ_8', des courbes du système $|2C_{02}^*| = |C_0^* + C_{01}^*|$.

Il est bien évident que la surface Φ obtenue en faisant $p = 9$ est un cas particulier de la surface Φ que l'on aurait obtenue en faisant $p = 3$.

Liége, le 16 septembre 1933.

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.