EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*
N° 1, 1938.

Quelques remarques sur les surfaces de genres un et de rang trois,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

1. — Soit F une surface algébrique de genres un ($p_a = P_4 = 1$) contenant une involution I_3, d'ordre trois et de genres un également ($p_a = P_4 = 1$). Cette involution possède six points unis et l'on peut prendre comme modèle projectif d'une image de l'involution une surface Φ, normale, de S_π, d'ordre $2\pi - 2$, à sections hyperplanes de genre π, possédant six points de diramation qui sont des points doubles biplanaires ordinaires de la surface [1].

Désignons par Γ les sections hyperplanes de la surface Φ. Chacun des six points de diramation A_1', A_2', ..., A_6' est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à l'ensemble de deux courbes rationnelles de degré -2, se coupant en un point; soient γ_{i1}, γ_{i2} les deux courbes équivalentes au point A_i' ($i = 1, 2, ..., 6$). Il existe sur la surface Φ deux systèmes linéaires de courbes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, de genre $\pi - 2$, satisfaisant aux relations fonctionnelles

$$|3\Gamma| = |3\Gamma_1 + 2(\gamma_{11} + \gamma_{21} + \cdots + \gamma_{61}) + \gamma_{12} + \gamma_{22} + \cdots + \gamma_{62}|,$$
$$|3\Gamma| = |3\Gamma_2 + \gamma_{11} + \gamma_{21} + \cdots + \gamma_{61} + 2(\gamma_{12} + \gamma_{22} + \cdots + \gamma_{62})|.$$

Aux courbes Γ, Γ_1, Γ_2 correspondent, sur la surface F, des courbes que nous désignerons respectivement par C_0, C_1, C_2, de genre $3\pi - 2$, appartenant à un même système linéaire $|C|$, que nous pouvons supposer sans restriction être le système des sections hyperplanes de la surface. Celle-ci appartient alors à un espace linéaire $S_{3\pi-2}$ et a l'ordre $6\pi - 6$. L'involution I_3 est engendrée sur F par une homographie H, de période trois, ayant trois axes ponctuels $S_\pi^{(0)}$, $S_{\pi-2}^{(1)}$, $S_{\pi-2}^{(2)}$. Les hyperplans passant par les deux derniers découpent sur F les courbes C_0; les hyperplans passant par $S_\pi^{(0)}$, $S_{\pi-2}^{(2)}$ découpent les courbes C_1 et les hyperplans passant par $S_\pi^{(0)}$, $S_{\pi-1}^{(2)}$ les courbes C_2. Seul l'espace $S_\pi^{(0)}$ rencontre la surface F, précisément aux six points unis de I_3.

---

[1] Voir à ce sujet nos travaux « Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un » (*Annales de l'École normale supérieure*, 1914, pp. 358-430; 1919, pp. 51-70); « Recherches sur les involutions cubiques appartenant à une surface algébrique » (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1921, pp. 105-124), et notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

2. — Tout système linéaire $|C|$, tracé sur F et transformé en lui-même par H, contient trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_3 et l'on peut toujours construire $|C|$ de manière que les courbes de l'un de ces systèmes partiels ne passent pas par les points unis. Mais il peut en exister d'autres et nous allons les examiner.

Changeons de notations et soit F une surface de genres un, normale, dans un espace S_r, transformée en elle-même par une homographie H de période trois, ayant trois axes ponctuels $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ de dimensions respectives r_0, r_1, r_2. Supposons que ces axes rencontrent respectivement la surface F en α_0, α_1, α_2 points simples, aucune des tangentes à la surface en un de ces points n'appartenant à l'axe correspondant de H.

Si l'involution I_3 d'ordre trois, engendrée par H sur F, est de genres un, on a

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 6.$$

Désignons par $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ les systèmes partiels découpés sur F par les hyperplans passant respectivement par $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, par $S^{(2)}$ et $S^{(0)}$, par $S^{(0)}$ et $S^{(1)}$. Ces systèmes sont composés au moyen de I_3 et ont respectivement les dimensions r_0, r_1, r_2. Sur une surface Φ (de genres un) image de l'involution I_3, il correspond à ces systèmes des systèmes linéaires complets $|\Gamma_0|$, $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$.

Soient R un point commun à la surface F et à l'axe $S^{(0)}$ de H; ρ le plan tangent à F en R. Le plan ρ ne rencontre par hypothèse l'espace $S^{(0)}$ qu'au point R. Comme le point R est nécessairement un point uni non parfait pour l'involution I_3, le plan ρ doit s'appuyer en un point R_1 sur $S^{(1)}$ et en un point R_2 sur $S^{(2)}$. Les courbes C_1 ont un point simple en R et y touchent la droite RR_2; les courbes C_2 ont également un point simple en R et y touchent la droite RR_1.

Si nous désignons par γ_1, γ_2 les courbes rationnelles de degré -2, se coupant en un point, dont l'ensemble équivaut au point de diramation de Φ homologue de R, on sait que γ_1 correspond au domaine du premier ordre du point infiniment voisin de R sur la droite RR_2, par exemple; γ_2 correspond alors au domaine du premier ordre du point infiniment voisin de R sur la droite RR_1. Les courbes Γ_1 rencontrent en un point la courbe γ_1, mais ne rencontrent pas γ_2; les courbes Γ_2 rencontrent γ_2 en un point et ne rencontrent pas γ_1. Les courbes Γ_0 ne rencontreront ni γ_1 ni γ_2.

On peut répéter ce raisonnement pour les points unis de I_3 appartenant aux axes $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ de H et parvenir sans difficulté aux relations fonctionnelles liant les courbes Γ_0, Γ_1, Γ_2, $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{61}, \gamma_{62}$ sur la surface Φ. Nous nous bornerons, pour ne pas compliquer les notations, à poursuivre le raisonnement dans le cas simple $\alpha_0=4$, $\alpha_1=\alpha_2=1$.

3. — Supposons donc que la surface F rencontre l'axe $S^{(0)}$ de H en quatre points A_1, A_2, A_3, A_4, l'axe $S^{(1)}$ en un point A' et l'axe $S^{(2)}$ en un point A''. Désignons par γ_{11} et γ_{12}, γ_{21} et γ_{22}, γ_{31} et γ_{32}, γ_{41} et γ_{42} les couples de courbes rationnelles de degré -2 équivalentes aux points de diramation de Φ homologues de A_1, A_2, A_3, A_4 respectivement; par γ_1' et γ_2' le couple correspondant au point A' et enfin par γ_1'', γ_2'' le couple analogue correspondant au point A''.

Les courbes Γ_0 ne rencontrent pas les courbes $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{42}$; elles rencontrent γ_1' et γ_1'' chacune en un point; enfin, elles ne rencontrent pas γ_2', γ_2''.

Les courbes Γ_1 rencontrent les courbes $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{31}, \gamma_{41}, \gamma_2''$ chacune en un point et ne rencontrent pas les autres courbes γ.

Les courbes Γ_2 rencontrent les courbes $\gamma_{12}, \gamma_{22}, \gamma_{32}, \gamma_{42}, \gamma_2'$ chacune en un point et ne rencontrent pas les autres courbes γ.

On en déduit sans difficulté que les courbes

$$3\Gamma_0 + 2(\gamma_1' + \gamma_1'') + \gamma_2' + \gamma_2'',$$

$$3\Gamma_1 + 2(\gamma_{11} + \gamma_{21} + \gamma_{31} + \gamma_{41}) + \gamma_{12} + \gamma_{22} + \gamma_{32} + \gamma_{42} + \gamma_1'' + 2\gamma_2'',$$

$$3\Gamma_2 + \gamma_{11} + \gamma_{21} + \gamma_{31} + \gamma_{41} + 2(\gamma_{12} + \gamma_{22} + \gamma_{32} + \gamma_{42}) + \gamma_1' + 2\gamma_2'$$

appartiennent à un même système linéaire.

Si nous désignons par $r_0=\pi$ le genre des courbes Γ_0, les courbes C sont de genre $r=3\pi$, les courbes Γ_1 et Γ_2 de genre $r_1=r_2=\pi-1$.

Rapportons projectivement les courbes Γ_0 aux hyperplans d'un espace linéaire S_π à π dimensions. A la surface Φ correspond une surface normale que nous désignerons encore par Φ. Aux points unis A_1, A_2, A_3, A_4 de l'involution I_3 correspondent des points doubles biplanaires ordinaires de Φ. Les courbes γ_1', γ_1'' sont des droites de Φ. Aux courbes γ_2', γ_2'' correspondent des points doubles coniques de Φ, le premier situé sur la droite γ_1', le second sur la droite γ_1''.

4. — La surface normale Φ peut être multiple; dans ce cas, on sait que c'est nécessairement une surface rationnelle double, possédant une courbe de diramation. En d'autres termes, il

existe une transformation birationnelle involutive T de Φ en elle-même, possédant une courbe unie. Il nous a paru intéressant de signaler un cas où la surface Φ est double, T échangeant entre elles les courbes γ_2', γ_2'' mais non les courbes γ_1', γ_1''.

Considérons dans l'espace ordinaire l'homographie H de période trois, d'équations

$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{x_3'}{\varepsilon x_3} = \frac{x_4'}{\varepsilon^2 x_4},$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. Cette homographie possède comme axes ponctuels la droite O_1O_2, d'équations $x_3 = x_4 = 0$ et les points O_3 (0, 0, 1, 0), O_4 (0, 0, 0, 1) :

Comme surface F, nous prendrons la surface du quatrième ordre d'équation

$$\varphi_4(x_1, x_2) + x_3x_4\varphi_2(x_1, x_2) + x_3^3\varphi_1(x_1, x_2) + x_4^3\psi_1(x_1, x_2) + x_3^2x_4^2 = 0,$$

où φ_4, φ_2, φ_1, ψ_1 sont des formes en x_1, x_2 dont le degré est indiqué par l'indice. L'homographie H transforme cette surface en elle-même et engendre sur celle-ci une involution I_3 possédant six points unis, simples pour la surface, à savoir les points O_3, O_4 et les quatre points

$$\varphi_4(x_1, x_2) = 0, \qquad x_3 = x_4 = 0.$$

Comme courbes C, nous prendrons les courbes (de genre 9) découpées sur F par les quadriques. Les systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ sont respectivement découpés par les quadriques

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3 x_4 = 0, \tag{1}$$
$$x_3(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \lambda_3 x_4^2 = 0, \tag{2}$$
$$x_4(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \lambda_3 x_3^2 = 0. \tag{3}$$

Les quadriques (1) sont tangentes en O_3 au plan $x_4 = 0$ et en O_4 au plan $x_3 = 0$. Deux de ces quadriques se rencontrent suivant deux coniques; ces coniques appartiennent à une congruence linéaire et chaque conique de cette congruence est transformée en elle-même par H. Une de ces coniques coupe la surface F aux points unis O_3, O_4 et en outre en six points formant deux groupes de l'involution I_3.

5. — Pour obtenir une image Φ de l'involution I_3, rapportons projectivement les quadriques du système (1) aux plans de l'espace en posant

$$\frac{X_0}{x_1^2} = \frac{X_1}{x_1x_2} = \frac{X_2}{x_2^2} = \frac{X_3}{x_3x_4},$$

les X étant les coordonnées d'un point de cet espace.

Nous avons

$$X_1^2 = X_0 X_2 \tag{4}$$

et la surface Φ sera un cône double du second degré.

Posons

$$\varphi_4(x_1, x_2) \equiv a_0 x_1^4 + a_1 x_1^3 x_2 + a_2 x_1^2 x_2^2 + a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4,$$
$$\varphi_2(x_1, x_2) \equiv b_0 x_1^2 + b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2,$$
$$\varphi_1(x_1, x_2) \equiv c_0 x_1 + c_1 x_2, \qquad \psi_1(x_1, x_2) \equiv d_0 x_1 + d_1 x_2.$$

La courbe de diramation de la surface Φ sera découpée sur le cône (4) par la surface

$$[a_0 X_0^2 + a_1 X_0 X_1 + a_2 X_1^2 + a_3 X_1 X_2 + a_4 X_2^2 + X_3(b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2) + X_3^2]^2$$
$$- 4 X_3^3 [c_0 d_0 X_0 + (c_0 d_1 + c_1 d_0) X_1 + c_1 d_1 X_2] = 0.$$

Pour obtenir un plan double, projetons le cône (4) du point (1, 0, 0, 0) sur le plan $X_0 = 0$; nous obtenons pour la surface Φ un plan double dont la courbe de diramation est

$$\left.\begin{aligned}&[\varphi_4(X_1, X_2) + X_2 X_3 \varphi_2(X_1, X_2) + X_2^2 X_3^2]^2\\ &\quad - 4 X_2^3 X_3^3 \varphi_1(X_1, X_2)\, \psi_1(X_1, X_2) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Les quadriques (1) tangentes en O_3 à la droite O_3O_4 sont caractérisées par $\lambda_3 = 0$; elles sont aussi tangentes en O_4 à la même droite. Aux sections de F par ces quadriques correspondent les plans passant par le sommet du cône (4). Par conséquent, aux domaines des points infiniment voisins de O_3 et de O_4 sur la droite O_3O_4, points qui sont unis pour I_3, correspond le point double (conique) du cône (4).

Le plan tangent au point O_3 à la surface F a pour équation $\varphi_1 = 0$. Il coupe la surface suivant une courbe γ_3 ayant un tacnode en O_3. En effet, cette courbe γ_3 est découpée sur le plan $\varphi_1 = 0$ par la surface

$$\varphi_4 + x_3 x_4 \varphi_2 + x_4^3 \psi_1 + x_3^2 x_4^2 = 0, \tag{6}$$

qui a un point double uniplanaire en O_3. Le plan tangent à la surface (6) en O_3, $x_4 = 0$, coupe cette surface suivant une courbe ayant un point quadruple en O_3; donc O_3 est un tacnode pour la surface (5) et par conséquent pour la courbe γ_3.

Les coniques γ_2, touchant $x_4 = 0$ en O_3, $x_3 = 0$ en O_4 et situées dans le plan $\varphi_1 = 0$, coupent γ_3 en quatre points confondus en O_3, en un point O_4 et en trois points, variables, formant des groupes de I_3. Sur une conique γ_2, il y a un groupe de I_3 formé en général de trois points distincts et un groupe formé de trois points coïncidents infiniment voisins de O_3. A l'ensemble des groupes de I_3 situés sur la courbe γ_3 et aux points infiniment voisins de O_3 correspond, sur le plan double, la droite double

$$\varphi_1(X_1, X_2) = 0.$$

De même, à la section de F par le plan tangent $\psi_1=0$ à cette surface en O_4 correspond la droite double

$$\psi_1(X_1, X_2) = 0.$$

On remarquera d'ailleurs que chacune de ces droites coupe la courbe de diramation (5) en quatre points confondus en O_3 (0, 0, 1) (point quadruple de la courbe) et touche encore cette courbe en deux points. Il correspond donc sur la surface F, à chacune de ces droites, une courbe décomposée (en une courbe proprement dite et un domaine de point).

Aux points unis de I_3 situés sur la droite O_1O_2 correspondent les points de rencontre de la courbe $X_3=0$ et de la courbe de diramation (5), c'est-à-dire les points

$$\varphi_4(X_1, X_2) = 0, \qquad X_3 = 0.$$

On vérifie aisément que ces points sont des points de rebroussement de la courbe de diramation (5).

La courbe (5) possède, comme on sait, un point quadruple O_3 (0, 0, 1) auquel est infiniment voisin, sur la droite $X_2=0$, un point quadruple.

6. — Considérons maintenant les courbes découpées sur la surface F par les quadriques du système (2). Pour obtenir l'équation des courbes qui leur correspondent sur le plan double, il faut éliminer x_1, x_2, x_3, x_4 entre l'équation de la surface F, l'équation (2) et les équations établissent la correspondance entre les x et les X; il faut ensuite éliminer X_0 entre l'équation trouvée et celle du cône (4). On obtient ainsi l'équation

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_3^2X_2^2X_3^2\varphi_1(X_1, X_2)\\ -\lambda_3(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2)[\varphi_4(X_1, X_2)+X_2X_3\varphi_2(X_1, X_2)+X_2^2X_3^2]\\ +X_2X_3(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2)^2\psi_1(X_1, X_2)=0,\end{array}\right\} \quad (7)$$

qui représente une famille de quintiques planes passant par les quatre points de rebroussement de la courbe (5).

Les quadriques (2) ne passent pas par O_4 et touchent en O_3 la droite O_3O_4. Il en résulte que les courbes découpées sur F par les quadriques (2) ont pour homologues, sur le cône double (4), des courbes passant par le sommet du cône. C'est ce que l'on vérifie sans peine, ces courbes étant découpées sur le cône par les surfaces cubiques

$$\begin{aligned}&\lambda_3^2 X_3^2(c_0X_1 + c_1X_2)\\ &- \lambda_3(\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2)[a_0X_0^2 + \cdots + a_4X_2^2 + X_3(b_0X_0 + \cdots) + X_3^2]\\ &+ X_3(\lambda_1^2X_0 - 2\lambda_1\lambda_2X_1 + \lambda_2^2X_2)(d_0X_1 + d_1X_2) = 0,\end{aligned}$$

passant par le point (0, 0, 0, 1).

Les courbes (7) ont un point triple en O_3' (0, 0, 1). Elles enveloppent la courbe de diramation du plan double, ce qui montre qu'il leur correspond, sur F, des courbes décomposées, l'une de ces courbes appartenant à une quadrique (2).

On trouve de même qu'aux courbes découpées sur F par les quadriques (3) correspondent, sur le plan double, les quintiques

$$\begin{aligned}&\lambda_3^2 X_2^2 X_3^2 \psi_1(X_1, X_2)\\ &- \lambda_3(\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2)[\varphi_4(X_1, X_2) + X_2X_3\varphi_2(X_1, X_2) + X_2^2X_3^2]\\ &+ X_2X_3(\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2)^2\varphi_1(X_1, X_2) = 0,\end{aligned}$$

possédant des propriétés analogues à celles des courbes (7).

Liége, le 13 janvier 1938.

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.