Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 1er décembre 1934, nº 12.

Sur les involutions du second ordre de l'espace,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

(*Cinquième note.*)

Nous reprenons ici l'étude de l'involution de Montesano considérée dans notre quatrième note [1], dont nous conservons les notations. Nous avions construit un système linéaire quadruplement infini de surfaces du quatrième ordre, passant par la courbe fondamentale de l'involution et composé au moyen de celle-ci. Nous montrons que dans ce système se trouvent cinq surfaces dont chacune représente une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un. Les surfaces qui correspondent à ces surfaces sur la variété image de l'involution de Montesano possèdent douze points doubles coniques et sont de trois manières l'enveloppe de systèmes d'indice deux de quadriques.

1. Reprenons le système linéaire ∞^6 des surfaces F' du quatrième ordre passant simplement par la courbe Γ, d'ordre huit et de genre cinq, fondamentale pour la transformation birationnelle involutive du septième ordre T. En rapportant projectivement les surfaces de $|F'|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_6, nous avons obtenu une variété V_3^8, à trois dimensions et d'ordre huit. A la transformation T correspond une

[1] *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Cl. des Sc.), 1934, p. 976.

homographie harmonique H de S_6, transformant V_3^8 en elle-même et ayant comme axes ponctuels une droite σ_1 ne rencontrant pas V_3^8 et un espace linéaire à quatre dimensions σ_4 coupant V_3^8 suivant une courbe Δ d'ordre huit et de genre cinq, qui correspond à la courbe unie de T.

Les surfaces F′ ne passent pas par les dix quadrisécantes $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$ de Γ et ces droites sont fondamentales pour le système $|F'|$. Par la droite r_1 passent donc ∞^5 surfaces F′ et deux de ces surfaces ont encore en commun, en dehors de Γ et de r_1 une courbe du septième ordre, de genre quatre, s'appuyant en deux points sur r_1. Celles de ces courbes qui appartiennent à une des surfaces F′ passant par r_1 forment sur cette surface un système de degré six et par suite trois surfaces F′ passant par r_1 et n'appartenant pas à un même faisceau se rencontrent en six points en dehors de la base. Il en résulte qu'à la droite r_1 correspond, sur la variété V_3^8, un point double R_1 nécessairement conique. De même, aux droites $r_2, r_3, \ldots, r_{10}$ correspondent, sur la variété V_3^8, des points doubles coniques $R_2, R_3, \ldots, R_{10}$.

Les droites $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$ sont fondamentales de seconde espèce pour la transformation T et associées par couples. Précisément, tout point de la droite r_{2i+1} et tout point de la droite r_{2i+2} $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ forment un couple de l'involution I_2 engendrée par T. Par suite les droites $R_1R_2, R_3R_4, \ldots, R_9R_{10}$ sont unies pour l'homographie H et s'appuient sur les axes σ_1, σ_4 de celle-ci.

2. Dans le système $|F'|$, il existe deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_2 : l'un, $|F'_0|$, est ∞^4 et correspond au système des sections de V_3^8 par les hyperplans contenant la droite σ_1 ; l'autre, $|F'_1|$, est un faisceau ayant pour base la courbe Γ et la courbe unie Δ de I_2 ; il correspond au système des sections de V_3^8 par les hyperplans passant par σ_4.

Considérons la surface F'_0 passant par les droites r_1, r_3, r_5, r_7 et désignons-la par F'_{09}. Cette surface, étant transformée en elle-même par T, contient également les droites r_2, r_4, r_6, r_8.

Aux plans de l'espace, T fait correspondre des surfaces Φ du septième ordre passant doublement par la courbe Γ et simplement par les dix quadrisécantes de cette courbe. Ces surfaces Φ découpent, sur la surface F'_{09}, des courbes variables du quatrième ordre qui correspondent aux sections planes de la surface. Observons que la surface F'_{09} ne peut être réductible, car la courbe Γ ne peut appartenir à une surface d'ordre inférieur à quatre. D'autre part, il est facile de voir que la surface F'_{09} ne peut posséder uue courbe double sans que les surfaces Φ aient en commun une courbe en dehors de Γ et des droites r_1, r_2, ..., r_{10}, ce qui est impossible. Cela étant, aux sections planes C de la surface F'_{09}, qui sont de genre trois, T fait correspondre des courbes du quatrième ordre de genre trois qui ne peuvent être que les sections planes de la surface. Les surfaces Φ coupent donc F'_{09}, en dehors de Γ et des droites r_1, r_2, ..., r_8, suivant les sections planes de la surface.

La transformation Γ détermine donc, entre les plans de l'espace (ou mieux entre les sections planes de F'_{09}), une homographie θ. Celle-ci ne peut être l'identité, car la courbe commune à un plan et à la surface Φ qui lui correspond ne peut être toujours dégénérée. D'ailleurs, dans l'hypothèse $\theta = 1$, la courbe Γ appartiendrait à une surface cubique, ce qui est impossible. L'homographie θ est involutive et détermine, sur F'_{09}, la même involution que la transformation T. L'homographie θ ne peut être une homologie, car T aurait alors une courbe unie plane du quatrième ordre, en dehors de la courbe Δ; par suite θ est une homographie biaxiale harmonique. Les axes de θ coupent F'_{09} aux points de rencontre de cette surface et de la courbe Δ; par conséquent ces axes sont deux des quadrisécantes de la courbe Δ. Il y a deux faisceaux de sections planes de F'_{09} formés de courbes transformées en elles-mêmes par T.

Désignons par C_1 les courbes du huitième ordre découpées sur F'_{09} par les autres surfaces du système $|F'|$. Les surfaces F du huitième ordre passant doublement par la courbe Γ et par les droites $r_1, \ldots, r_{10}$ découpent sur F'_{09} les courbes du système

$$|2C_1 - r_1 - r_2 - \cdots - r_8|$$

et par conséquent les surfaces Φ découpent sur F'_{09} les courbes du système

$$|2C_1 - C - r_1 - r_2 - \cdots - r_8|.$$

Comme ces courbes sont des sections planes de la surface, on a

$$2C_1 \equiv 2C + r_1 + r_2 + \cdots + r_8. \tag{1}$$

3. Passons à la variété V_3^8. A la surface F'_{09} correspond la section de cette variété par l'hyperplan contenant les droites σ_1, $R_1R_2, \ldots, R_7R_8$. Nous continuerons à désigner cette surface par F'_{09}; elle possède des points doubles coniques en R_1, $R_2, \ldots, R_8$.

Aux courbes C_1 correspondent les sections hyperplanes de F'_{09}, que nous désignerons encore par C_1. Aux courbes C correspondent des courbes de genre trois, que nous désignerons toujours par C. Observons que les courbes C passent simplement par les points doubles $R_1, \ldots, R_8$.

Cela étant, la relation fonctionnelle (1) est la condition nécessaire et suffisante pour que la surface F'_{09} représente une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un [1].

Il existe une hyperquadrique touchant la surface F'_{09} le long de chaque courbe C.

Observons que le système $|F'_0|$ contient quatre autres surfaces analogues à F'_{09}. Considérons, en effet, la surface F'_0 passant par les droites $r_1, \ldots, r_{2i-1}, r_{2i+3}, \ldots r_9$. Elle passe

(1) L. Godeaux, Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un (*Annales de l'École normale supérieure*, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70). Voir chap. VII, 1919.

également par $r_2, \ldots, r_{2i}, r_{2i+4}, \ldots, r_{10}$; nous la désignerons par F'_{02i+3}. Les surfaces F'_{01}, F'_{03}, F'_{05}, F'_{07} possèdent les mêmes propriétés que F'_{09}.

Il existe, dans le système $|F'_0|$, *cinq surfaces images d'involutions du second ordre appartenant à des surfaces de genres un ; chacune d'elles contient huit des dix quadrisécantes de la courbe* Γ.

4. En rapportant projectivement aux hyperplans d'un espace linéaire S_4 les surfaces F'_0, on obtient une variété à trois dimensions Ω, du quatrième ordre, image de l'involution I_2 de Montesano. Cette variété Ω est l'enveloppe d'un système d'indice deux d'hyperquadriques passant par une courbe Δ' d'ordre huit, de genre cinq, double pour la variété. La courbe Δ' correspond à la courbe unie Δ de la variété V_3^8.

Au couple de points $R_1 R_2$, doubles coniques de V_3^8, correspond un point double conique R'_1 de Ω. Cette dernière variété possède de même quatre autres points doubles coniques R'_3, R'_5, R'_7, R'_9 correspondant respectivement aux couples R_3 et R_4, R_5 et R_6, R_7 et R_8, R_9 et R_{10} de V_3^8.

Reprenons la surface F'_{09} et soit Ψ_9 la section hyperplane de la variété Ω qui lui correspond. La surface Ψ_9 possède douze points doubles coniques : les quatre points R'_1, R'_3, R'_5, R'_7 et les huit points suivant lesquels l'hyperplan ρ_9 qui la contient coupe la courbe Δ'. Les hyperquadriques dont Ω est l'enveloppe coupent ρ_9 suivant un système ∞^1 d'indice deux de quadriques dont l'enveloppe est la surface Ψ_9.

Nous avons reconnu plus haut l'existence, sur la surface F'_{09}, de deux faisceaux de courbes C de genre trois transformées en elles-mêmes par T (ou par l'homographie H si l'on considère F'_{09} comme section hyperplane de V_3^8). Chacun de ces faisceaux a quatre points-base appartenant à la courbe Δ. A une courbe de l'un de ces faisceaux correspond sur la surface Ψ_9 une courbe elliptique. Désignons par C'_1 les sections planes de Ψ_0; par C' les courbes elliptiques qui correspondent aux courbes C de l'un des faisceaux considérés; par s_1, s_2, s_3, s_4 les courbes rationnelles de degré — 2 équivalentes, au point de vue des transformations birationnelles, aux quatre points fixes de Δ' suivant lesquels les courbes C' coupent cette courbe. Nous avons, en tenant compte de la relation (1),

$$2\,C_1' \equiv 2\,C' + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + r_1' + r_3' + r_5' + r_7',$$

$r_1', \ldots, r_7'$ étant les courbes rationnelles de degré — 2 équivalentes aux points doubles coniques $R_1', \ldots, R_7'$ de Ψ_9. Il en résulte qu'il existe un système ∞^1 d'indice deux de quadriques de ρ_9, passant par R_1', R_3', R_5', R_7' et par quatre points de Δ_1' dont Ψ_9 est l'enveloppe. De même, il existe dans ρ_9 un système ∞^1 d'indice deux de quadriques passant par R_1', R_3', R_5', R_7' et par les quatre autres points de Δ' situés dans ρ_9, ayant pour enveloppe la surface Ψ_9.

On obtient évidemment des résultats analogues pour les sections de Ω par les hyperplans passant par quatre quelconques des points $R_1', \ldots, R_9'$; ces sections sont les surfaces qui correspondent aux surfaces F_{01}', F_{03}', F_{05}' et F_{07}'.

Liége, le 25 novembre 1934.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique