EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
N$^{os}$ 8-9-10, 1934.

# Sur les surfaces de genres un de l'espace à six dimensions,

par LUCIEN GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liége.

Une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) peut se ramener, par une transformation birationnelle, à une surface d'ordre $2\pi - 2$, normale, appartenant à un espace linéaire à $\pi$ dimensions, dont les sections hyperplanes sont des courbes canoniques de genre $\pi$. MM. Enriques et Chisini ont démontré (¹) qu'une courbe canonique de genre $\pi$ est l'intersection complète de $\frac{1}{2}(\pi - 2)(\pi - 3)$ hyperquadriques, ou bien est située sur une surface réglée rationnelle d'ordre $\pi - 2$, ou enfin, si $\pi = 6$, est située sur une surface de Véronèse. En s'appuyant sur ce théorème, M. P. Du Val a établi (²) qu'une surface normale de genres un, de $S_\pi$, est l'intersection complète de $\frac{1}{2}(\pi - 2)(\pi - 3)$ hyperquadriques, ou bien est l'intersection d'une variété rationnelle normale d'ordre $\pi - 2$, engendrée par $\infty^1$ plans, avec une variété cubique contenant $\pi - 4$ de ces plans, ou enfin, si $\pi = 6$, est l'intersection du cône de $S_6$ projetant une surface de Véronèse d'un point et d'une hypersurface cubique contenant un des cônes quadratiques du cône précédent.

Dans cette note, nous considérons la surface F de genres un, de $S_6$, intersection complète de six hyperquadriques et nous démontrons que l'on peut la construire de la manière suivante :

*Si l'on considère la variété algébrique* $V_3^8$ *intersection de trois hyperquadriques de* $S_6$, *deux de ces hyperquadriques contenant un espace linéaire à trois dimensions* $\sigma$, *et si l'on considère en outre la section de* $V_3^8$, *en dehors de* $\sigma$, *par un hyperplan contenant* $\sigma$, *une hyperquadrique passant par la surface ainsi obtenue coupe encore* $V_3^8$ *suivant une surface normale de genres un, d'ordre dix, à sections hyperplanes de genres six, intersection complète de six hyperquadriques linéairement indépendantes.*

---

(¹) ENRIQUES-CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. III (Bologne, Zamichelli, 1924), p. 106.

(²) P. DU VAL, Superficie di genere uno che non sono base per un sistema di quadriche. (*Rend. R. Accad. Naz. dei Lincei*, 1° sem. 1932, pp. 276-279.)

1. Soit F une surface algébrique normale de genres un ($p_a = P_4 = 1$) de l'espace $S_6$ à six dimensions. La surface F est donc d'ordre dix, à sections hyperplanes C de genre six. Les hyperquadriques découpent, sur F, le système complet $|2C|$, de dimension 21; d'autre part, les hyperquadriques de $S_6$ sont en nombre $\infty^{27}$; par conséquent, il y a $\infty^5$ de ces hyperquadriques contenant F. Nous supposerons que F est l'intersection complète de six hyperquadriques $Q_1, Q_2, \ldots Q_6$ linéairement indépendantes.

Trois hyperquadriques linéairement indépendantes, passant par F, par exemple $Q_1, Q_2, Q_3$, ne peuvent avoir en commun une variété ayant plus de trois dimensions, car alors F ne pourrait être intersection complète des six hyperquadriques $Q_1, Q_2, \ldots Q_6$. Les hyperquadriques $Q_1, Q_2, Q_3$ ont donc en commun une variété $V_3^8$, $\infty^3$, d'ordre huit.

Un hyperplan $\varpi$ coupe F suivant une courbe C et $V_3^8$ suivant une surface $\Phi$ de genres un ($p = P_4 = 1$). La courbe C appartient, sur la surface $\Phi$, à un système linéaire $|C|$, $\infty^6$, de courbes d'ordre dix. Ces courbes découpent, sur une section hyperplane $\Gamma$ de $\Phi$, de genre cinq, une série linéaire d'ordre dix, non spéciale et par suite de dimension cinq; il existe donc une courbe de $|C|$ contenant la courbe $\Gamma$, complétée par une conique $\gamma$ La surface $\Phi$ contient donc une conique $\gamma$, nécessairement isolée.

Considérons un second hyperplan $\varpi_1$ de $S_6$, contenant la courbe $\Gamma$. Il coupe $V_3^8$ suivant une surface $\Phi_1$ contenant une conique $\gamma_1$. Soient G le groupe de dix points suivant lequel l'espace $\varpi\varpi_1$ coupe F; $G_1$ le groupe de huit points suivant lequel $\varpi\varpi_1$ coupe la section de $V_3^8$ par un troisième hyperplan; $G_2$, $G_2'$ les couples de points déterminés sur $\Gamma$ respectivement par $\gamma$, $\gamma_1$. Si l'on se reporte aux systèmes de courbes tracés sur $\Phi$, puis sur $\Phi_1$, on a successivement, sur la courbe $\Gamma$,

$$g \equiv g_1 + g_2, \qquad g \equiv g_1 + g_2'$$

et par suite les groupes $G_2$, $G_2'$ sont équivalents. Si ces groupes sont distincts, la courbe $\Gamma$ est hyperelliptique, ce qui est impossible, puisque $\Phi$ est de genres un. Par conséquent, $G_2, G_2'$ coïncident et les coniques $\gamma$, $\gamma_1$ se rencontrent en deux points.

Tout hyperplan de $S_6$ contient donc une conique $\gamma$ de $V_3^8$ et les différentes coniques ainsi obtenues se coupent deux à deux en deux points. Il en résulte que ces coniques appartiennent à une quadrique Q. La variété $V_3^8$ contient donc une quadrique.

**2**. Reprenons la surface $\Phi$ considérée plus haut et désignons par $\Gamma_1$ les sections de $\Phi$ par les hyperplans passant par le plan de la conique $\gamma$, en dehors de cette conique. Sur la surface $\Phi$, on a donc

$$C \equiv \Gamma + \gamma, \qquad \Gamma \equiv \Gamma_1 + \gamma$$

et par suite

$$2\Gamma \equiv C + \Gamma_1.$$

En d'autres termes, dans l'hyperplan $\varpi$, les hyperquadriques contenant la courbe C, commune à F et à $\Phi$, rencontrent encore $\Phi$ suivant les courbes $\Gamma_1$, du sixième ordre. Ces courbes $\Gamma_1$ sont de genre deux et forment, sur $\Phi$, un réseau de degré deux.

Désignons par $\sigma$ l'espace $S_3$ contenant la quadrique $\underset{\sim}{Q}$. Les hyperplans passant par $\sigma$ coupent $V_3^8$, en dehors de $\underset{\sim}{Q}$, suivant des surfaces $\Psi$ du sixième ordre. Toute section hyperplane d'une surface $\Psi$ est évidemment une courbe $\Gamma_1$.

Les hyperquadriques du réseau déterminé par $\underset{\sim}{Q}_1$, $\underset{\sim}{Q}_2$, $\underset{\sim}{Q}_3$ coupent $\sigma$ suivant la quadrique $\underset{\sim}{Q}$; par suite il y a $\infty^1$ de ces hyperquadriques qui contiennent l'espace $\sigma$. Nous pouvons donc supposer sans restriction que $\underset{\sim}{Q}_1$ coupe $\sigma$ suivant $\underset{\sim}{Q}$ et que $\underset{\sim}{Q}_2$, $\underset{\sim}{Q}_3$ contiennent $\sigma$.

Cela étant, considérons deux hyperplans $\varpi_1$, $\varpi_2$ de $S_6$ passant par $\sigma$ et soient $\Psi_1$, $\Psi_2$ les surfaces $\Psi$ qu'ils déterminent sur $V_3^8$. L'espace $\varpi_1\varpi_2$ coupe $\underset{\sim}{Q}_1$ suivant une hyperquadrique et $\underset{\sim}{Q}_2$, $\underset{\sim}{Q}_3$, chacune suivant deux espaces à trois dimensions, dont l'un est $\sigma$. Par conséquent, l'espace $\varpi_1\varpi_2$ coupe $V_3^8$, en dehors de $\underset{\sim}{Q}$, suivant une conique $\psi$. La variété $V_3$ contient donc une congruence (linéaire) de coniques $\psi$, au moyen de laquelle est composé le réseau $|\Psi|$. Chaque surface $\Psi$ contient un faisceau de coniques $\psi$ découpant, sur chaque section hyperplane de cette surface, la série $g_2^1$ canonique.

On a, d'après ce qui précède, les relations fonctionnelles

$$F \equiv \Phi + Q, \qquad \Phi \equiv \Psi + Q;$$

d'où

$$2\Phi \equiv F + \Psi.$$

Par conséquent, on obtient la construction suivante de la surface F : considérons dans $S_6$ trois hyperquadriques linéairement indépendantes $\underset{\sim}{Q}_1$, $\underset{\sim}{Q}_2$, $\underset{\sim}{Q}_3$, se rencontrant suivant une variété $V_3^8$, et supposons que les deux dernières contiennent un espace à trois dimensions $\sigma$, n'appartenant pas à $\underset{\sim}{Q}_1$. Soit $\Psi$ la surface suivant laquelle un hyperplan passant par $\sigma$ coupe $V_3^8$ en dehors de cet espace. Une hyperquadrique passant par $\Psi$ coupe encore $V_3^8$ suivant une surface F de genres un.

**3**. Il nous reste à vérifier que la surface F est bien l'intersection complète des six hyperquadriques $Q_1$, $Q_2$, ..., $Q_6$. Chacune des hyperquadriques $Q_4$, $Q_5$, $Q_6$ coupe $V_3^8$, en dehors de F, suivant une surface $\Psi$. Or, les surfaces $\Psi$ forment un réseau composé au moyen d'une congruence de coniques $\psi$; trois de ces surfaces, n'appartenant pas à un même faisceau, ne peuvent avoir en commun que les points-base du réseau. Soit P un tel point; considérons un hyperplan $\varpi$ passant par P mais ne contenant pas $\sigma$ et soit $\Phi$ la section de $V_3^8$ par $\varpi$. Sur $\Phi$, les surfaces $\Psi$ découpent un réseau de courbes $\Gamma_1$, de genre deux, ayant un point-base, ce qui est impossible puisque $\Phi$ est de genres un. Le réseau $|\Psi|$ est donc dépourvu de points-base et F est l'intersection complète de six hyperquadriques.

Liége, le 4 octobre 1934.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles.