EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
N° 11, 1934.

Sur une surface algébrique non rationnelle de genres arithmétique et géométrique nuls, et de genre linéaire un,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

On sait que M. Enriques a construit une surface de genres $p_a = p_g = 0$ possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro et M. Castelnuovo une surface de genres $p_a = p_g = 0$ possédant un faisceau de courbes bicanoniques elliptiques. Plus tard, d'autres surfaces non rationnelles de genres $p_a = p_g = 0$ ont été construites par M. Enriques, par M. Campedelli et par nous-même. Nous avons en outre indiqué un procédé permettant de construire de telles surfaces, procédé basé sur les propriétés des involutions appartenant à une surface algébrique que nous avons obtenues dans ces dernières années. On trouvera dans notre monographie: *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (¹), un exposé de la question et les renseignements bibliographiques.

Il semble assez difficile d'édifier une théorie générale des surfaces en question, et dans ces conditions, il est intéressant de construire des surfaces particulières de ce type. C'est à une telle construction qu'est consacrée cette note. Précisément, nous construisons une surface régulière, de genre linéaire $p^{(1)} = 1$, possédant deux courbes elliptiques isolées Γ_1, Γ_2, dépourvue de courbes canoniques. La surface possède une seule courbe bicanonique $\Gamma_1 + \Gamma_2$ et un faisceau $|\Gamma|$ de courbes elliptiques tricanoniques. Chacune des courbes Γ_1, Γ_2, comptée trois fois appartient au faisceau $|\Gamma|$. La surface a les genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$, $P_3 = 2, \ldots$

1. Considérons la variété de Segre représentant les couples de points d'une droite s_0 et d'un plan σ_0. C'est, comme on sait, une variété cubique V_3^3, à trois dimensions, normale dans un espace S_5 à cinq dimensions.

(¹) *Actualités scientifiques et industrielles.* Exposés de Géométrie, publiés sous la direction de M. CARTAN (Paris, Hermann, 1934).

Voir également une note « Sur la construction de surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls » (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, Cl. des Sc., 1934, pp. 8-11), parue depuis la rédaction de la monographie précédente.

Si z_1, z_2 sont les coordonnées projectives homogènes d'un point de s_0 et y_1, y_2, y_3 celles d'un point de σ_0, en posant

$$X_{11} : X_{12} : X_{21} : X_{22} : X_{31} : X_{32} = y_1 z_1 : y_1 z_2 : y_2 z_1 : y_2 z_2 : y_3 z_1 : y_3 z_2,$$

on obtient les équations de la variété V_3^3 sous la forme

$$\left\| \begin{matrix} X_{11} & X_{21} & X_{31} \\ X_{12} & X_{22} & X_{32} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Les espaces à trois dimensions

$$\lambda_1 X_{11} + \lambda_2 X_{21} + \lambda_3 X_{31} = 0, \qquad \lambda_1 X_{12} + \lambda_2 X_{22} + \lambda_3 X_{32} = 0$$

coupent V_3^3 suivant des quadriques Q formant un réseau $|Q|$. Les plans ϖ

$$\mu_1 X_{11} + \mu_2 X_{12} = 0, \quad \mu_1 X_{21} + \mu_2 X_{22} = 0, \quad \mu_1 X_{31} + \mu_2 X_{32} = 0$$

appartiennent à V_3^3 et forment un faisceau $|\varpi|$.

Soit F la surface du neuvième ordre intersection de la variété V_3^3 et d'une hypersurface cubique V_4^3 de S_5. La surface F contient un faisceau linéaire, dépourvu de points-base $|C|$, formé par les cubiques elliptiques découpées par V_4^3 sur les plans ϖ. Elle possède, d'autre part, un réseau $|D|$ de courbes D du sixième ordre intersections de V_4^3 et des quadriques Q. Les courbes D sont des courbes canoniques de genre quatre et deux quadriques Q ayant en commun une droite; le réseau $|D|$ est de degré trois. Un plan ϖ et une quadrique Q ont en commun une droite; donc une courbe C et une courbe D ont en commun trois points.

Un hyperplan contenant un plan ϖ coupe encore V_3^3 suivant une quadrique Q; par conséquent, le système des sections hyperplanes de F est le système $|C + D|$, de degré neuf et de genre sept.

Les groupes canoniques d'une courbe D sont découpés sur celle-ci par les plans de l'espace S_3 auquel elle appartient et par suite par les hyperplans de S_5. L'adjoint $|D'|$ de $|D|$ est donc le système $|C + D|$ et l'on a

$$|D' - D| = |C|.$$

Le système canonique de F est donc le faisceau $|C|$ et l'on a $p_g = 2$, $p^{(1)} = 1$. L'adjoint $|C'|$ de $|C|$ est

$$|C'| = |D' - D + C| = |2C|.$$

On a donc $P_2 = 3$. Les systèmes pluri canoniques de F sont composés au moyen du faisceau $|C|$ et l'on a $P_3 = 4, \ldots, P_k = k + 1, \ldots$

Le système $|D'| = |C + D|$ découpe, sur une courbe D, la série canonique complète. Par suite, d'après un théorème de M. Picard, la surface F est régulière et $p_a = 2$.

La surface F *est régulière et son système canonique est le faisceau de cubiques elliptiques* $|C|$. *Les systèmes pluri canoniques sont composés au moyen de ce faisceau et la surface* F *a les caractères* $p^{(1)} = 1$, $p_a = p_g = 2$, $P_2 = 3, \dots, P_k = k + 1, \dots$

2. Considérons, dans le plan σ_0 et sur la droite s_0, les homographies de période trois

$$y'_1 : y'_2 : y'_3 = y_1 : \varepsilon y_2 \; \varepsilon^2 y_3 ; \quad z'_1 : z'_2 = z_1 : \varepsilon z_2 ,$$

où ε est une racine primitive cubique de l'unité. Les points homologues de V_3^3 se correspondent dans l'homographie de période trois H d'équations

$$X'_{11} : X'_{12} : X'_{21} : X'_{22} : X'_{31} \, X'_{32} = X_{11} : \varepsilon X_{12} : \varepsilon X_{21} : \varepsilon^2 X_{22} : \varepsilon^2 X_{31} : X_{32} .$$

Cette homographie H possède comme axes les droites s_1, s_2, s_3 d'équations

$$X_{12} = X_{21} = X_{22} = X_{31} = 0, \qquad (s_1)$$
$$X_{22} = X_{31} = X_{11} = X_{32} = 0, \qquad (s_2)$$
$$X_{11} = X_{32} = X_{12} = X_{21} = 0. \qquad (s_3)$$

Supposons que la variété V_4^3 soit transformée en elle-même par l'homographie H. Soit, pour fixer les idées,

$$a_{11} X_{11}^3 + a_{12} X_{12}^3 + a_{21} X_{21}^3 + a_{22} X_{22}^3 + a_{31} X_{31}^3 + a_{32} X_{32}^3 = 0$$

l'équation de cette variété. La variété V_3^3 étant transformée en elle-même par H, il en sera de même de la surface F et H engendrera, sur cette surface, une involution cyclique I_3 d'ordre trois.

L'involution I_3 est dépourvue de points unis. En effet, les intersections des variétés V_3^3, V_4^3 avec s_1, par exemple, sont données par

$$X_{11} X_{32} = 0, \qquad a_{11} X_{11}^3 + a_{32} X_{32}^3 = 0$$

et sont distinctes.

Dans le faisceau $|C|$, l'homographie H détermine une involution cubique pour laquelle il y a deux courbes unies, respectivement situées dans les plans

$$X_{11} = X_{21} = X_{31} = 0 ; \qquad X_{12} = X_{22} = X_{32} = 0.$$

Nous désignerons des courbes par C_1, C_2.

3. Désignons par Φ une surface image de l'involution I_3 Aux courbes C_1, C_2, qui contiennent chacune ∞^1 groupe de I_3, correspondent sur Φ des courbes Γ_1, Γ_2 qui sont elliptiques d'après la formule de Zeuthen.

Entre le genre arithmétique π_a de Φ et celui p_a de F, on a la relation

$$p_a + 1 = 3(\pi_a + 1);$$

d'où $\pi_a = 0$. D'autre part, Φ est régulière comme F et le genre géométrique de Φ est $\pi_g = 0$.

Il en résulte que la surface Φ est dépourvue de courbes canoniques.

Dans le système bicanonique $|2C|$ de F, il existe trois courbes contenant ∞^1 groupes de l'involution I_3; ce sont les courbes $2C_1$, $2C_2$, $C_1 + C_2$; il leur correspond, sur Φ, les courbes $2\Gamma_1$, $2\Gamma_2$, $\Gamma_1 + \Gamma_2$. L'adjointe d'une des courbes Γ_1, Γ_2 a pour homologue, sur F, une adjointe de C_1 ou C_2, contenant ∞^1 groupes de I_3. Par suite, l'adjointe de Γ_1 est l'une des courbes $2\Gamma_1$, $2\Gamma_2$ ou $\Gamma_1 + \Gamma_2$. Ce ne peut être $2\Gamma_1$, car Γ_1 serait une courbe canonique de Φ; ce ne peut être $\Gamma_1 + \Gamma_2$, car Γ_2 serait une courbe canonique de Φ. Par conséquent, l'adjointe de Γ_1 est la courbe $2\Gamma_2$. De même, l'adjointe de Γ_2 est la courbe $2\Gamma_1$.

$$\Gamma_1' = 2\Gamma_2, \qquad \Gamma_2' = 2\Gamma_1.$$

Nous avons successivement

$$(\Gamma_1 + \Gamma_2)' = 3\Gamma_1 = 3\Gamma_2,$$
$$(\Gamma_1 + \Gamma_2)'' = 2\Gamma_1 + \Gamma_1' = 2\Gamma_1 + 2\Gamma_2$$

et par suite

$$(\Gamma_1 + \Gamma_2)'' - (\Gamma_1 + \Gamma_2) = \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

La surface Φ possède donc une courbe bicanonique, $\Gamma_1 + \Gamma_2$, et le bigenre de Φ est $P_2 = 1$.

A une courbe C correspond sur Φ une courbe elliptique Γ et à cette courbe Γ correspondent, sur F, trois courbes C transformées les unes dans les autres par l'homographie H.

Les courbes Γ forment un faisceau linéaire $|\Gamma|$ qui comprend les courbes $3\Gamma_1$, $3\Gamma_2$.

Le système tricanonique de Φ est le faisceau $|\Gamma|$ et l'on a $P_3 = 2$.

Le système quadricanonique de Φ est $2\Gamma_1 + 2\Gamma_2$ et l'on a $P_4 = 1$, cette courbe étant isolée. Le système 5 — canonique est $4\Gamma_1 + \Gamma_2$ et l'on a $P_5 = 2$. On trouve de même $P_6 = 3$, etc.

D'autre part, on a évidemment $p^{(1)} = 1$ pour le genre linéaire de Φ.

La surface Φ *a les genres* $p^{(1)} = 1$, $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$, $P_3 = 2$ $P_4 = 1$, $P_5 = 2$, $P_6 = 3$, ...

Liége, le 12 novembre 1934.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles.