Sur deux congruences associées à une congruence W

Par

Lucien Godeaux, Liége

En l'honneur de M. E. Kruppa

(Reçu le 22 juillet 1960)

A diverses reprises, nous nous sommes occupé des congruences W en utilisant la représentation de ces congruences par des surfaces de l'espace à cinq dimensions, tracées sur l'hyperquadrique *de Klein*[1]. Cette note fait suite à ces recherches; nous associons, d'une manière intrinsèque, deux congruences de droites à une congruence W donnée.

1. Considérons une congruence W; désignons par (x), $(\bar{x})$ ses nappes focales, par u, v les asymptotiques de ces surfaces et par j la droite génératrice de la congruence.

Soient U, V les points de l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 qui représentent les tangentes aux courbes u, v en un point x de (x), $\bar{U}$, $\bar{V}$ les points qui représentent les tangentes de même nom en un point $\bar{x}$ de $(\bar{x})$, enfin J le point qui représente la droite j.

Les droites $\bar{U}\bar{V}$, UV appartiennent à Q et se coupent au point J.

Les points U, V, de même que les points $\bar{U}$, $\bar{V}$, sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Ils donnent lieu à deux suites de Laplace

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots, \qquad (L)$$

$$\ldots, \bar{U}_n, \ldots, \bar{U}_1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_n, \ldots, \qquad (L)$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

---

[1] *La théorie des surfaces et l'espace réglé.* Actualités scient. No 138 (Paris, Herman, 1934). *Sur une homographie associée à une congruence W* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1955, pp. 870—874). *Sur les quadriques de Lie des deux nappes d'une congruence W* (Idem. 1955, pp. 1101—1103). *Sulle congruence W* (Rendiconti di Matematica, Roma, 1956, pp. 36—45). *Congruence W e trasformazioni di Guichard* (Rendiconti del Seminario Matematico di Messina, 1975, pp. 1—12).

Nous supposons connus les résultats obtenus dans ces notes et particulièrement ceux qui sont exposés dans le premier travail cité.

Les suites L, $\overline{L}$ sont autopolaires par rapport Q. D'une manière précise, le point U_n a pour hyperplan polaire $V_{n-2}\, V_{n-1}\, V_n\, V_{n+1}\, V_{n+2}$ et le point V_n, l'hyperplan $U_{n-2}\, U_{n-1}\, U_n\, U_{n+1}\, U_{n+2}$. On a la même propriété pour la suite $\overline{L}$.

Le point J décrit un réseau conjugué aux congruences (UV), $(\overline{U}\overline{V})$. Il détermine une suite de *Laplace*

$$\ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-1}, \ldots \tag{I}$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u, inscrite dans les suites L, $\overline{L}$. Précisément, le point J_n appartient aux droites $U_{n-1}\, U_n$, $\overline{U}_{n-1}\, \overline{U}_n$ et le point J_{-n} aux droites $V_{n-1}\, V_n$, $\overline{V}_{n-1}\, \overline{V}_n$.

2. On peut attacher à la congruence (j) une quatrième suite de Laplace de S_5.

Désignons par P l'intersection des droites $U\overline{U}$, $V\overline{V}$, par P_1 l'intersection des droites $U\overline{U}$, $U_1\, \overline{U}_1, \ldots,$ par P_n l'intersection des droites $U_{n-1}\, \overline{U}_{n-1}\, U_n\, \overline{U}_n$, par P_{-n} l'intersection des droites $V_{n-1}\, \overline{V}_{n-1}$, $V_n\, \overline{V}_n$.

Le point J_n appartient aux droites $U_{n-1}\, U_n$ et $\overline{U}_{n-1}\, \overline{U}_n$ dont les conjugués par rapport à Q sont $V_{n-2}\, V_{n-1}\, V_n\, V_{n+1}$, $\overline{V}_{n-2}\, \overline{V}_{n-1}\, \overline{V}_n\, \overline{V}_{n+1}$. L'hyperplan polaire de J_n contient ces deux espaces et par conséquent les points $P_{-n+2}\, P_{-n+1}\, P_{-n}\, P_{-n-1}\, P_{-n-2}$, qui le déterminent.

L'hyperplan polaire de P_{-n} est donc $J_{n-2}\, J_{n-1}\, J_n\, J_{n+1}\, J_{n+2}$.

De même, l'hyperplan polaire de J_{-n} est $P_{n-2}\, P_{n-1}\, P_n\, P_{n+1}\, P_{n+2}$ et par conséquent l'hyperplan polaire de P_n est $J_{-n+2}\, J_{-n+1}\, J_{-n}\, J_{-n-1}$ J_{-n-2}.

En particulier, l'hyperplan polaire du point P est $J_2\, J_1\, J J_{-1}\, J_{-2}$ qui représente le complexe linéaire osculateur à la congruence W le long de la droite j.

La suite

$$\ldots, P_n, \ldots, P_1, P, P_{-1}, \ldots, P_{-n}, \ldots \tag{II}$$

est la conjuguée de la suite (I) par rapport à Q; c'est donc une suite de Laplace dont chaque point est la transformé du précédent dans le sens des u. Elle est circonscrite aux suites L, $\overline{L}$.

3. Considérons le plan $J_{n-1}\, J_n\, J_{n+1}$; il a pour conjugué par rapport à Q le plan $P_{-n+1}\, P_{-n}\, P_{-n-1}$ qui contient les points V_{n-1}, $\overline{V}_{n-1}$, V_n, $\overline{V}_n$. Ces deux plans coupent l'hyperquadrique Q suivant des coniques dont les points représentent les génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique que nous désignerons par Ψ_n.

De même, le plan $J_{-n+1}\, J_{-n}\, J_{-n-1}$ et son conjugué $P_{n-1}\, P_n\, P_{n+1}$ par rapport à Q coupent cette hyperquadrique suivant deux coniques quatre autres points caractéristiques communs respectivement aux quadriques Ψ_2, Ψ_{-2}.

Observons que le point J_1 appartient aux plans $JJ_1 J_2$, $PP_1 P_2$, $UU_1 U_2$, $\overline{U}\overline{U}_1 \overline{U}_2$ et le point J_{-1} aux plans $JJ_{-1} J_{-2}$, $PP_{-1} P_{-2}$, $VV_1 V_2$, $\overline{V}\,\overline{V}_1 \overline{V}_2$, par conséquent les quatre homographies biaxiales harmoniques ayant pour couples de plans axiaux $JJ_1 J_2$ et $PP_{-1} P_{-2}$, $JJ_{-1} J_{-2}$ et $PP_1 P_2$, $UU_1 U_2$ et $VV_1 V_2$, $\overline{U}\overline{U}_1 \overline{U}_2$ et $\overline{V}\,\overline{V}_1 \overline{V}_2$, qui transforment Q en soi, échangent entre eux les points G_1, G_2. Ou encore, les droites g_1, g_2 sont échangées entre elles par les polarités par rapport aux quadriques Ψ_1, Ψ_{-1}, Φ et $\overline{\Phi}$.

5. Les coordonnées projectives normales de Wilzynski de point x de la surface (x) satisfont au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2\, b\, \frac{\partial x}{\partial v} + c_1\, x = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + 2\, a\, \frac{\partial x}{\partial u} + c_2\, x = 0.$$

Au point x, nous attachons le tétraèdre mobile de Cartan dont les sommets sont x et, en représentant par φ^{ik} la dérivée de φ prise i fois par rapport à u et k fois par rapport à v, les points

$$m = x(\log a)^{10} - 2\, x^{10},\quad n = x(\log b)^{01} - 2\, x^{01},$$

$$y = [8\, ab - (\log a)^{10} \log b)^{01}]\, x + 2\, x^{10}\, (\log b)^{01} + 2\, x^{01}\, (\log a)^{10} - 4\, x^{11}.$$

Tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$z_1 x + z_2 m + z_3 n + z_4 y$$

et z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales de ce point.

Tout point de S_5 peut être représenté par

$$\eta_2\, U_2 + \eta_1\, U_1 + \eta_0\, U + \xi_0\, V + \xi_1\, V_1 + \xi_2\, V_2 \tag{1}$$

et les η, ξ sont les coordonnées locales du point.

Si nous représentons par $\Omega(p, q) = 0$ la condition pour que deux points p, q soient conjugués par rapport à Q, le point (1) appartient à cette hyperquadrique si l'on a

$$\beta\, \eta_2^2 + [\eta_1 - \eta_2(\log bh_1)^{01}]^2 - 2\, \eta_0\, \eta_2 - \\ - \alpha\, {\xi_0}^2 - [\xi_1 - \xi_2(\log a\, h_1)^{10}]^2 + 2\, \xi_0\, \xi_2 - 0, \tag{2}$$

où l'on a posé

$$h_1 = -(\log b)^{11} + 4\,ab,\; k_1 = -\log a)^{11} + 4\,ab,$$

$$\alpha = 2\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}} + 4(b^{01} + c_1),$$

$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}} + 4(a^{10} + c_2).$$

Au point (1) sous la condition (2) correspond la droite commune aux plans

$$\eta_2[z_1(\log.\, bh_1)^{01} + \beta\, z_3] - \eta_1\, z_1 - 2\,\eta_0\, z_3 + 2\,\xi_0\, z_2 + \\ + \xi_2\, z_1 - \xi_2[z_1(\log.\, ak_1)^{10} + \alpha\, z_2] = 0,$$

$$\eta_2[z_3(\log bh_1)^{01} - z_1] - \eta_1\, z_3 + 2\,\xi_0\, z_4 - \xi_1\, z_3 + \xi_2[z_3(\log a\, k_1)^{10} - \alpha z_4] = 0,$$

$$\eta_2[z_2(\log bh_1)^{01} - \beta z_4] - \eta_1\, z_2 + 2\,\eta_0\, z_4 - \xi_1\, z_2 + \xi_2[z_2(\log a\, k_1)^{10} - z_1] = 0,$$

$$\eta_2[z_2 + z_4(\log bh_1)^{01}] - \eta_1\, z_4 + \xi_1\, z_4 - \xi_2[z_3 + z_4(\log ak_1)^{10}] = 0.$$

6. Le point J est donné par

$$J = \lambda\, U - \mu\, V,$$

où l'on a $\lambda^{01} + 2\,a\,\mu = 0$, $\mu^{10} + 2\,b\,\lambda = 0$. En posant

$$\lambda_1 = \lambda^{10} - \lambda(\log a)^{10},\; \lambda_2 = \lambda_1^{10} - \lambda_1(\log a\, k_0)^{10},$$

$$\mu_1 = \mu^{01} - \mu(\log b)^{01},\; \mu_2 = \mu_1^{10} - \mu_1(\log bh_1)^{01},$$

on a, pour le second foyer de la droite j

$$\bar{x} = (\lambda_1 - \mu_1)\, x + \lambda m - \mu n$$

et le plan focal $\bar{\xi}$ a pour équation

$$\mu\, z_2 + \lambda z_3 + (\lambda_1 + \mu_1)\, z_4 = 0.$$

La droite j est donnée par

$$\mu\, z_2 + \lambda\, z_3 = 0,\; z_4 = 0.$$

La quadrique Ψ_1 a pour équation

$$\lambda(z_2\, z_3 + z_1\, z_4) + \mu(z_2^2 + \beta z_4^2) + 2\,\mu_1\, z_2\, z_4 + 2\,[\mu_2 + \mu_1(\log bh_1)^{01}]\, z_4^2 = 0 \quad (\Psi_1)$$

et la quadrique Ψ_{-1}

$$\mu(z_2\, z_3 + z_1\, z_4) + \lambda(z_3^2 + \alpha z_4^2) + 2\,\lambda_1\, z_3\, z_4 + 2[\lambda_2 + \lambda_1(\log ak_1)^{10}]\, z_4^2 = 0. \quad (\Psi_{-1})$$

Enfin les droites g_1, g_2 sont données par

$$\frac{z_2}{\lambda\mu_1} = \frac{z_3}{\mu\lambda_1} = \frac{z_4}{-\lambda\mu}, \qquad (G_1)$$

$$\lambda\mu\, z_1 - \mu\lambda\, z_2 - \lambda\mu_1\, z_3 = 0,\; z_4 = 0. \qquad (G_2)$$

Les quadriques Ψ_1, Ψ_{-1} ont en commun, en dehors de j, la cubique gauche

$$\left\| \begin{matrix} \lambda z_3 + \mu z_2 & z_4 \\ \lambda z_1 + 2\mu_1 z_2 + M z_4 & -z_2 \\ \mu z_1 + 2\lambda_1 z_3 + L z_4 & -z_3 \end{matrix} \right\| = 0.$$

passant par les points x, $\bar{x}$.

7. La droite g_1 engendre une congruences (g_1) associée d'une manière intrinsèque à la congruence (j).

Si l'on représente par $\varphi x + \lambda \mu_1 m + \mu \lambda_1 n - \lambda\mu y$ un foyer de la droite g_1, φ satisfait à l'équation

$$\begin{vmatrix} \mu \lambda_1 \mu_1 + 4b\lambda^2\mu_1 - \varphi\mu & \lambda\mu M - 4a\mu^2\lambda_1 - \lambda\mu_1^2 \\ \lambda\mu L - 4b\lambda^2\mu_1 - \mu\lambda_1^2 & \lambda\lambda_1\mu_1 + 4a\lambda_1\mu - \varphi\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on a posé

$$L = 2\lambda_2 + 2\lambda_1(\log ak_1)^{10} + \alpha\lambda, \quad M = 2\mu_2 + 2\mu_1(\log bh_0)^{01} + \beta\mu.$$

Quant à l'équation différentielle des développables, elle s'écrit

$$\begin{vmatrix} (\mu\lambda_1\mu_1 + 4b\lambda^2\mu_1)\,du + (\lambda\mu M - 4a\mu^2\lambda_1 - \lambda\mu_1^2)\,dv & \mu\,du \\ (\lambda\mu L - 4b\lambda^2\mu_1 - \mu\lambda_1^2)\,du + (\lambda\lambda_1\mu_1 + 4a\mu^2\lambda_1)\,dv & \lambda\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

8. La droite g_2 engendre également une congruence (g_2) liée intrinsèquement à la congruence (j).

La droite g_2 rencontre les droites xm, xn aux points $\lambda_1 x + \lambda m$, $\mu_1 x + \mu n$. Si l'on représente un foyer par

$$\lambda_1 x + \lambda m + \varphi(\mu_1 x + \mu m),$$

φ satisfait à l'équation

$$\begin{vmatrix} L\lambda\mu + 4b\lambda^2\mu_1 - \mu\lambda_1^2 + \varphi(\mu\lambda_1\mu_1 + 4b\lambda^2\mu_1) & \mu\varphi \\ \lambda\lambda_1\mu_1 + 4a\mu^2\lambda_1 + \varphi(M\lambda\mu + 4a\mu^2\lambda_1 - \lambda\mu_1^2) & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

L'équation différentielle des développables est donnée par

$$\begin{vmatrix} (L\lambda\mu + 4b\lambda^2\mu_1 - \mu\lambda_1^2)\,du + (\mu\lambda_1\mu_1 + 4b\lambda^2\mu_1)\,dv & \mu\,du \\ (\mu\lambda_1\mu_1 + 4a\mu^2\lambda_1)\,du + (M\lambda\mu + 4a\mu^2\lambda_1 - \lambda\mu_1^2)\,dv & \lambda dv \end{vmatrix} = 0.$$

Liége, le 14 juillet 1960.

Printed in Austria