Bull. Sc. math., 2e série,
84, 1960, p. 41 à 46.

UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES CONGRUENCES W

Par M. Lucien GODEAUX

Considérons une congruence W dont les nappes focales (x), $(\bar{x})$ sont des surfaces proprement dites. Les quadriques de Lie relatives aux surfaces (x), $(\bar{x})$ aux foyers d'une droite de la congruence se rencontrent suivant les côtés d'un quadrilatère gauche. Cette propriété est-elle caractéristique des congruences W ? La réponse est affirmative et nous démontrons dans cette Note le théorème suivant :

Étant donnée une congruence de droites dont les nappes focales sont des surfaces proprement dites, si les quadriques de Lie relatives à ces surfaces, aux foyers de toute droite de la congruence, se rencontrent suivant les côtés d'un quadrilatère gauche, la congruence est W.

Nous arrivons à ce résultat en utilisant la représentation de la congruence par une surface de l'espace à cinq dimensions et les suites de Laplace de cet espace associées aux nappes focales de la congruence, suites de Laplace que nous supposerons illimitées dans les deux sens. Nous nous servirons des résultats établis dans notre exposé sur *la Théorie des surfaces et l'espace réglé* (1);

1. Soient (j) une congruence de droites, (x) et $(\bar{x})$ ses surfaces focales (surfaces proprement dites), u, v les paramètres des développables. Nous supposerons, pour préciser, que les développables d'une famille ont pour arêtes de rebroussement les courbes u de la surface (x) et celles de l'autre famille, les courbes v de la surface $(\bar{x})$.

(1) *Actualités scient.*, n° 138 (Paris, Hermann, 1934).

Désignons $\xi = \xi\,(u, v)$, $\eta = \eta\,(u, v)$ les asymptotiques de la surface (x), par $\bar{\xi} = \bar{\xi}\,(u, v)$, $\bar{\eta} = \bar{\eta}\,(u, v)$ celles de la surface $(\bar{x})$, par t_ξ, t_η les tangentes aux asymptotiques ξ, η en un point x de la surface (x), par $\bar{t}_\xi$, $\bar{t}_\eta$ les tangentes aux asymptotiques $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ en un point $\bar{x}$ de la surface (x).

Nous appellerons X, Y les points de l'hyperquadrique Q de Klein, de S_5, qui représentent les tangentes t_ξ, t_η et $\overline{X}$, $\overline{Y}$ les points qui représentent $\bar{t}_\xi$, $\bar{t}_\eta$.

Les points X, Y sont transformés de Laplace l'un de l'autre, les variables étant ξ, η et appartiennent à une suite de Laplace L,

$$(L) \qquad \ldots,\ X_2,\ X_1,\ X,\ Y,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des ξ. De même, les points $\overline{X}$, $\overline{Y}$ appartiennent à une suite de Laplace $\overline{L}$,

$$(\overline{L}) \qquad \ldots,\ \overline{X}_2,\ \overline{X}_1,\ \overline{X},\ \overline{Y},\ \overline{Y}_1,\ \overline{Y}_2,\ \ldots,$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des $\bar{\xi}$.

Les suites L, $\overline{L}$ sont autopolaires par rapport à l'hyperquadrique Q et les droites XY, $\overline{X}\,\overline{Y}$ se rencontrent en un point J représentant la droite j.

Nous supposerons les suites L, $\overline{L}$ illimitées dans les deux sens.

Les sections de Q par les plans XX_1X_2, YY_1Y_2, qui sont conjugués par rapport à Q, représentent deux demi-quadriques ayant pour support commun la quadrique de Lie Φ attachée à la surface (x) au point x. De même, les sections de Q par les plans conjugués $\overline{X}\,\overline{X}_1\,\overline{X}_2$, $\overline{Y}\,\overline{Y}_1\,\overline{Y}_2$ représentent les demi-quadriques ayant pour suppport commun la quadrique de Lie $\overline{\Phi}$ attachée à la surface $(\bar{x})$ au point $\bar{x}$.

2. Nous commencerons par démontrer un théorème de Wilczynski obtenu par ce dernier par voie analytique ([2]).

Soit R_ξ la réglée lieu des droites j touchant la surface (x) aux points d'une courbe ξ de cette surface.

En un point x de la courbe ξ, le plan osculateur à cette courbe coïncide avec le plan tangent à la surface (x) en ce point. Ce

([2]) Wilczynski, *Sur la Théorie générale des congruences* (Mémoires in-4° de l'Académie royale de Belgique, 1911).

plan contient la droite j, de R_ξ, passant par le point x et est donc également tangent en ce point à la surface R_ξ. On en conclut que le plan osculateur à la courbe ξ en x est également tangent à R_ξ et par conséquent, la courbe ξ est également une asymptotique de la réglée R_ξ. C'est en cela que consiste le théorème de Wilczynski.

Considérons trois points x, x', x'' de la courbe ξ, les tangentes t, t', t'' aux courbes η passant par ces points et les droites de la congruence (j), soient j, j', j'', passant par ces points. La quadrique de directrices j, j', j'' et celle de directrices t_η, t'_η, t''_η se touchent en x, x', x''. Lorsque x', x'' tendent vers x, la première quadrique a pour limite une quadrique φ_ξ osculant la réglée R_ξ le long de j et la seconde, la quadrique de Lie Φ. On en conclut que les quadriques φ_ξ et Φ se raccordent le long de la droite t_ξ.

Ce résultat peut être obtenu par un autre procédé.

La réglée R_ξ est représentée sur Q par une courbe ξ tracée sur la surface (J). Si l'on observe que le plan XYY_1 touche l'hyperquadrique Q le long de la droite XY, on voit que la tangente à la courbe ξ en J rencontre la droite YY_1 en un point J'_ξ. De même, la tangente à la courbe ξ tracée sur la surface (J'_ξ) en J'_ξ rencontre la droite Y_1Y_2 en un point J''_ξ. La section de Q par le plan $JJ'_\xi J''_\xi$ représente une demi-quadrique ayant pour support φ_ξ; cette demi-quadrique contient la droite j. La droite $J'_\xi J''_\xi$ coupe l'hyperquadrique Q en deux points P_1, P_2 représentant deux génératrices p_1, p_2 de même mode que j, appartenant à φ_ξ. Les deux points P_1, P_2 appartiennent également à la section de Q par le plan YY_1Y_2 et par suite les droites p_1, p_2 appartiennent également à Φ.

Les génératrices du second mode de la quadrique φ_ξ sont représentées par la section de Q par le plan conjugué à $JJ'_\xi J''_\xi$ par rapport à cette hyperquadrique. Les points X, Y, Y_1, Y_2 ont respectivement pour hyperplans polaires par rapport à Q les hyperplans $X_1XYY_1Y_2$, $X_2X_1XYY_1$, $X_3X_2X_1XY$, $X_4X_3X_2X_1X$, par conséquent les hyperplans polaires de J, J'_ξ, J''_ξ passent respectivement par les espaces X_1XYY_1, X_2X_1XY, $X_3X_2X_1X$ et le plan conjugué de $JJ'_\xi J''_\xi$ contient la droite de XX_1. Par suite, la quadrique φ_ξ touche la quadrique Φ de Lie le long de la droite t_ξ.

La quadrique φ_ξ, *osculatrice à la réglée* R_ξ *le long de la droite* j, *se raccorde à la quadrique de Lie* Φ *le long de la* *droite t_ξ et ces deux quadriques ont encore en commun deux droites p_1, p_2 de même mode que j sur φ_ξ et que t_m sur Φ.*

3. Nous pouvons associer à la congruence (j) trois autres quadriques analogues à φ_ξ.

Considérons la réglée R_η lieu des droites j touchant la surface (x) aux points d'une courbe η de cette surface. La quadrique osculatrice φ_η à cette réglée le long de la droite j se raccorde à la quadrique de Lie Φ le long de la droite t_η et les deux quadriques ont encore en commun deux droites r_1, r_2 de même mode que j sur φ_η et que t_ξ sur Φ.

Si l'on considère les réglées $\overline{R}_\xi$, $\overline{R}_\eta$ lieu des droites j touchant la surface $(\overline{x})$ respectivement le long des courbes $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, les quadriques osculatrices $\overline{\varphi}_\xi$, $\overline{\varphi}_\eta$ à ces réglées le long d'une droite j se raccordent à la quadrique de Lie $\overline{\Phi}$, la première le long de $\overline{t}_\eta$, la seconde le long de $\overline{t}_\xi$. Les quadriques $\overline{\varphi}_\xi$, $\overline{\Phi}$ ont encore en commun deux droites $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$ de même mode que j sur $\overline{\varphi}_\xi$ et que $\overline{t}_\eta$ sur $\overline{\Phi}$. Enfin, les quadriques $\overline{\varphi}_\eta$, $\overline{\Phi}$ ont encore en commun deux droites $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$ de même mode que j sur $\overline{\varphi}_\eta$ et que $\overline{t}_\xi$ sur $\overline{\Phi}$.

A la demi-quadrique de support φ_η contenant les droites j, r_1, r_2, correspond dans S_5 la section de Q par le plan $JJ'_\eta J''_\eta$ osculateur en J à la courbe η tracée sur la surface (J) et représentant R_η. Le point J'_η peut être choisi sur XX_1 et J''_η sur X_1X_2. La droite $J'_\eta J''_\eta$ coupe Q en deux points R_1, R_2 représentant les droites r_1, r_2.

La demi-quadrique de support $\overline{\varphi}_\xi$ contenant les droites j, $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$ est représentée sur Q par le plan $J\overline{J}'_\eta\overline{J}''_\eta$ osculateur en J à la courbe $\overline{\xi}$ tracée sur (J). Les points $\overline{J}'_\xi$, $\overline{J}''_\xi$ ont été choisis respectivement sur $\overline{Y}\overline{Y}_1$, $\overline{Y}_1\overline{Y}_2$. La droite $\overline{J}'_\xi\overline{J}''_\xi$ coupe Q en deux points $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ images des droites $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$.

Enfin, la section de Q par le plan $J\overline{J}'_\eta\overline{J}''_\eta$ osculateur en J à la courbe $\overline{\eta}$ tracée sur la surface (J) représente la demi-quadrique de support $\overline{\varphi}_\eta$ contenant les droites j, $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$. Le point $\overline{J}'_\eta$ a été choisi sur $\overline{X}\overline{X}_1$ et le point $\overline{J}''_\xi$ sur $\overline{X}_1\overline{X}_2$. Les points $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ représentant les droites $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$ sont les intersections de Q avec la droite $\overline{J}'_\eta$, $\overline{J}''_\eta$.

Observons que les droites JJ'_ξ, JJ'_η, $J\overline{J}'_\xi$, $J\overline{J}'_\eta$ sont tangentes à la surface (J) en J et que les points J'_ξ, J'_η, $\overline{J}'_\xi$, $\overline{J}'_\eta$ appartiennent donc au plan tangent à (J) en J.

4. Supposons que les quadriques de Lie Φ, $\overline{\Phi}$ aient en commun les côtés m_1, m_2, n_1, n_2 d'un quadrilatère gauche. Nous supposerons que les droites m_1, m_2 sont des génératrices de même mode que t_ξ sur Φ et que $\overline{t}_\xi$ sur $\overline{\Phi}$. Alors, n_1, n_2, sont des génératrices de même mode que t_η sur Φ et que $\overline{t}_\eta$ sur $\overline{\Phi}$.

Soient M_1, M_2, N_1, N_2 les points de l'hyperquadrique Q qui représentent les droites m_1, m_2, n_1, n_2. La droite $M_1 M_2$ est commune aux plans XX_1X_2, $\overline{X}\,\overline{X}_1\overline{X}_2$ et la droite N_1N_2 aux plans YY_1Y_2, $\overline{Y}\,\overline{Y}_1\overline{Y}_2$.

L'espace à trois dimensions conjugué de la droite M_1M_2 par rapport à Q contient les points Y, Y_1, Y_2, $\overline{Y}$, $\overline{Y}_1$, $\overline{Y}_2$ et l'espace à trois dimensions conjugué de la droite N_1N_2 contient les points X, X_1, X_2, $\overline{X}$, $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$.

Supposons que la droite N_1N_2 coupe les droites $Y Y_1$, $\overline{Y}\,\overline{Y}_1$ en des points distincts respectivement N', N''.

Le plan XYY_1, c'est-à-dire le plan XYN' touche Q le long de la droite XY, par conséquent, l'hyperplan polaire de N' par rapport à Q contient cette droite et par suite J. De même, l'hyperplan polaire de N'' par rapport à Q contient la droite $\overline{X}\,\overline{Y}$ et par suite le point J. Il en résulte que l'espace à trois dimensions conjugué de la droite N_1N_2 ou $N'N''$ contient, outre les points X, X_1, X_2, $\overline{X}$, $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, le point J et par suite les droites XY, $\overline{X}\,\overline{Y}$. La section de Q par cet espace représente la congruence linéaire ayant comme directrices les droites n_1, n_2. Par conséquent la droite j rencontre les droites n_1, n_2 et appartient à Φ, $\overline{\Phi}$, ce qui est absurde. En effet, Φ par exemple, coupe le plan tangent en x à la surface (x) suivant les droites t_ξ, t_η et ne peut donc contenir la droite j, qui appartient à ce plan. Il en résulte que les points N', N'' ne peuvent être distincts.

La droite N_1N_2 coupe donc les droites YY_1, $\overline{Y}\,\overline{Y}_1$ en un même point N. De même, la droite M_1M_2 coupe les droites XX_1, $\overline{X}\,\overline{X}_1$ en un même point M.

L'hyperplan tangent à l'hyperquadrique Q au point J contient les espaces à trois dimensions X_1XYY_1, $\overline{X}_1\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Y}_1$ certainement distincts. Ces deux espaces ont en commun un plan qui est d'une part le plan JMN et d'autre part, le plan tangent à la surface (J) en J. Or, ce dernier plan contient les points $J'_\xi \bar{J}''_\xi$ et $J'_\eta \bar{J}'_\eta$. On en conclut que les deux premiers de ces points coïncident avec N et les deux derniers avec M.

La droite JN touche en J les courbes ξ, $\bar{\xi}$ et ces courbes doivent donc coïncider. Les courbes η, $\bar{\eta}$ coïncident également et il y a donc conservation des asymptotiques sur les deux nappes focales (x), $(\bar{x})$ de la congruence (j). Celle-ci est donc une congruence W.

Si les quadriques de Lie des nappes focales d'une congruence de droites relatives aux foyers d'une droite se coupent suivant les côtés d'un quadrilatère gauche, la congruence est W.

5. On sait que dans ce cas, le point J décrit un réseau conjugué à chacune des congruences (XY), $(\bar{X}\bar{Y})$. Le point M est le transformé de Laplace de J dans le sens des η, nous le représenterons par J_1. De même, le point N est le transformé de Laplace de J dans le sens des ξ, nous le désignerons par J_{-1}.

Le transformé de Laplace J_2 de J_1 dans le sens des η appartient aux droites X_1X_2, $\bar{X}_1\bar{X}_2$ et coïncide avec les points J''_η, $\bar{J}''_\eta$. Les points R_1, R_2 et les points $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ coïncident dans un certain ordre avec les points M_1, M_2. De même, les points P_1, P_2 et $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ coïncident dans un certain ordre avec N_1, N_2.

Les quadriques φ_ξ et $\bar{\varphi}_\xi$ coïncident, de même que les quadriques φ_η et $\bar{\varphi}_\eta$. La quadrique φ_ξ rencontre Φ et $\bar{\Phi}$ suivant les droites n_1, n_2 et la quadrique φ_η coupe Φ et $\bar{\Phi}$ suivant les droites m_1, m_2.

Inversement, si l'on part d'une congruence W, les particularités précédentes se présentent et les quadriques de Lie Φ, $\bar{\Phi}$ se coupent suivant quatre droites formant nécessairement un quadrilatère gauche.

Lorsque la congruence (j) est W, nous avons déjà rencontré les quadriques φ_ξ et φ_η [3].

---

[3] *Voir* par exemple notre Note : *Familles de quadriques attachées à des congruences* W (*Rev. Math. pures et appliquées*, Bucarest, 1956, p. 93-97).