Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 32e année, n° 1-2, 1963, pp. 12-18

UNE FAMILLE DE VARIÉTÉS RATIONNELLES A TROIS DIMENSIONS

par LUCIEN GODEAUX
Membre de la Société

On sait qu'une courbe canonique de genre p, non hyperelliptique, d'ordre $2p - 2$, dans un espace linéaire S_{p-1} à $p - 1$ dimensions, appartient à $\frac{1}{2}(p - 2)(p - 3)$ hyperquadriques linéairement indépendantes. $p - 3$ de ces hyperquadriques passent par un espace linéaire à $p - 4$ dimensions et ont encore en commun une surface rationnelle d'ordre $\frac{1}{2}(p^2 - 5p + 8)$, sur laquelle la courbe canonique est tracée. Nous avons étudié cette surface dans un travail antérieur (1).

Dans cette note, nous étudions une généralisation de la surface dont il vient d'être question et précisément la variété à trois dimensions de l'espace S_{n+4} à $n + 4$ dimensions commune à $n + 1$ hyperquadriques linéairement indépendantes contenant un espace linéaire à n dimensions. Il s'agit d'une variété dont nous avons rencontré différents cas particuliers dans des recherches et pour cette raison, nous avons cru utile de traiter le cas général.

1. — Considérons, dans un espace linéaire S_{n+4} à $n + 4$ dimensions, un espace linéaire σ à n dimensions et la variété V à trois dimensions, intersection de $n + 1$ hyperquadrique linéairement indépendantes, passant par σ.

Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+4}$ les coordonnées projectives des points de S_{n+4} et $x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+3} = x_{n+4} = 0$ les équations de l'espace σ.

(1) *Sur les courbes canoniques* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1935, pp. 481-489, 826-831).

L'équation d'une hyperquadrique passant par σ est de la forme

$$x_0\varphi_0 + x_1\varphi_1 + \dots + x_n\varphi_n + \varphi = 0,$$

où $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont des formes linéaires et φ une forme quadratique en $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+4}$. Nous écrirons les équations des $n + 1$ hyperquadriques linéairement indépendantes passant par σ sous la forme

$$x_0\varphi_{i0} + x_1\varphi_{i1} + \dots + x_n\varphi_{in} + \varphi_i = 0 \qquad (1)$$
$$(i = 0,1, \dots, n)$$

le premier indice étant un numéro d'ordre.

Considérons la matrice à $n + 1$ lignes et $n + 2$ colonnes

$$\left\| \varphi_{i0}\varphi_{i1} \dots \varphi_{in}\varphi_2 \right\|, \quad (i = 0,1, \dots, n) \qquad (2)$$

et désignons par Δ_k le déterminant obtenu en supprimant la k-ième colonne et par Δ celui qui est obtenu en supprimant la dernière colonne.

Des équations (1) on déduit

$$x_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \; x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; \dots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

de sorte que si nous projetons la variété V de l'espace σ sur l'espace à trois dimensions Σ d'équations

$$x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0,$$

aux sections hyperspatiales de la variété correspondent les surfaces

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \dots \lambda_n & \lambda_{n+1} \; x_{n+1} + \dots \lambda_{n+4} \; x_{n+4} \\ \varphi_{i0} & \varphi_{i1} \dots \varphi_{in} & \varphi_i \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire des surfaces d'ordre $n + 2$ passant par la courbe Γ qui annule la matrice (2). Nous commencerons donc par déterminer l'ordre et le genre de la courbe Γ.

2. — Commençons par considérer une matrice M_n à n lignes et $n + 1$ colonnes de formes linéaires par rapport à quatre variables homogènes et désignons par m_n l'ordre de la courbe Γ_n représentée par la matrice égalée à zéro, par p_n son genre.

On sait que pour $n = 1$, on a $m_1 = 1$, $p_1 = 0$, pour $n = 2$, $m_2 = 3$, $p_2 = 0$, pour $n = 3$, $m_3 = 6$, $p_3 = 3$. On en déduit $m_n = \frac{1}{2} n(n+1)$.

Supposons cette formule vraie pour n et considérons la matrice M_{n+1}. Les déterminants obtenus en supprimant soit la première, soit la dernière colonne, égalés à zéro, représentent des surfaces d'ordre $n + 1$. Ils ont en commun une matrice à n lignes et $n - 1$ colonnes, représentant une courbe Γ_n. On en déduit que l'ordre de la courbe Γ_{n+1} est

$$m_{n+1} = (n + 1)^2 - \frac{1}{2} n(n + 1) = \frac{1}{2} (n + 1) (n + 2).$$

La formule est donc exacte. Elle est d'ailleurs connue.

Pour calculer le genre p_n, nous utiliserons un théorème classique de Castelnuovo, à savoir que si deux courbes C, C′ forment l'intersection complète de deux surfaces d'ordres m, n, la série canonique de C est découpée par les surfaces d'ordre $m + n - 4$ passant par C′ (mais non par C).

Les courbes Γ_n, Γ_{n-1} forment l'intersection complète de deux surfaces d'ordre n, donc la série caractéristique de Γ_n est découpée par les surfaces d'ordre $2n - 4$ passant par Γ_{n-1} mais non par Γ_n. Parmi les surfaces d'ordre $2n - 4$, il faut défalquer celles qui contiennent les surfaces d'ordre n passant par Γ_n, Γ_{n-1} et des surfaces d'ordre $n - 4$. On trouve ainsi que les surfaces d'ordre $2n - 4$ qui ne contiennent pas Γ_n, linéairement indépendantes, sont au nombre de

$$\frac{1}{6} (2n - 3) (2n - 2) (2n - 1) - \frac{2}{6} (n - 3) (n - 2) (n - 1) =$$

$$(n - 1) (n^2 - n - 1).$$

Ces surfaces découpent sur Γ_{n-1} une série de dimension

$$\frac{1}{2} n(n - 1) (2n - 4) - p_{n-1}.$$

On en déduit

$$p_n - p_{n-1} = (n - 1)^2 - 1 = n(n - 2).$$

On a $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 3$, $p_4 = 11$, ... On obtient

$$p_n = \frac{1}{6} (n - 1) (n - 2) (2n + 3).$$

Comme les surfaces d'ordre $2n - 4$ passant par Γ_{n-1} découpent sur Γ_n la série canonique d'ordre $2p_n — 2$, on trouve que Γ_{n-1} s'appuie sur Γ_n en

$$\frac{1}{3} n(n^2 — 1) \text{ points.}$$

3. — Venons-en à la courbe Γ. Elle appartient aux surfaces $\Delta_0 = 0$, $\Delta = 0$ et les deux déterminants ont en commun une matrice M_n à $n + 1$ lignes et n colonnes. Les deux surfaces ont donc en commun la courbe Γ et la courbe Γ_n, donc l'ordre de la courbe Γ est

$$(n + 1)(n + 2) — \frac{1}{2} n(n + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 4).$$

Quant au genre de Γ, nous utiliserons encore le théorème de Castelnuovo en observant que parmi les surfaces d'ordre $2n — 1$ passant par Γ_n mais non par Γ, il faut défalquer les surfaces formées de la surface $\Delta_0 = 0$ et de surfaces d'ordre $n — 3$, ainsi que les surfaces formées de la surface $\Delta = \Theta$ et de surfaces d'ordre $n — 2$. Les surfaces d'ordre $2n — 1$, linéairement indépendantes, ne contenant pas Γ_0 sont donc au nombre de

$$\frac{1}{2} n(2n^2 + 5n + 1).$$

Elles découpent sur Γ_n une série d'ordre $\frac{1}{2} n(n + 1)(2n — 1)$ et de dimension

$$\frac{1}{2} n(n+1)(2n—1)—\frac{1}{6}(n—1)(n—2)(2n+3)=\frac{1}{3}(2n^3+3n^2+n—3).$$

On en déduit que le genre p de Γ est

$$p = \frac{1}{6} n(2n^2 + 9n + 1).$$

Le nombre des points d'appui de Γ_n sur Γ se calcule comme plus haut. On trouve

$$\frac{1}{6} n(2n^2 + 3n + 1).$$

4. — Désignons par F' les surfaces d'ordre $n+2$ passant par Γ. Le nombre des surfaces d'ordre $n+2$ passant par Γ, linéairement indépendantes, est $n+5$. On en conclut que le système $|F'|$ est complet et que *la variété V est normale.*

Deus surfaces F' ont en commun une courbe C' d'ordre $\frac{1}{2}(n^2+3n+4)$. Une telle courbe est représentée par les équations

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_n & \lambda_{n+1} x_{n+1} + \dots + \lambda_{n+4} x_{n+4} \\ \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n & \mu_{n+1} x_{n+1} + \dots + \mu_{n+4} x_{n+4} \\ \varphi_{i0} & \varphi_{i1} & \dots & \varphi_{in} & \varphi_i \end{matrix} \right\| = 0$$

et on peut calculer son genre en utilisant de nouveau le théorème de Castelnuovo. On trouve que ce genre est égal à $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Par la méthode utilisée plus haut, on trouve que les courbes C' s'appuyent en $\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$ points sur Γ. Par conséquent, le degré du système $|F'|$ est égal à $\frac{1}{6}(n+2)(n^2+n+6)$. Tel est l'ordre de la variété V.

Nous désignerons par F les sections hyperplanes de la variété V et par C ses sections par des espaces linéaires à $n+2$ dimensions.

Observons qu'une surface F' est en général dépourvue de points singuliers ; on peut par conséquent calculer facilement ses genres et par suite ceux de F.

Dans l'espace S_{n+4}, la variété rationnelle V est normale et d'ordre

$$\frac{1}{6}(n+2)(n^2+n+6).$$

Ses sections hyperplanes sont des surfaces F de genres

$$p_a = p_g = \frac{1}{6}n(n^2-1),\ p^{(1)} = (n+2)(n-2)^2+1,$$

ses sections par des espaces linéaires à $n+2$ dimensions sont des courbes C de genre $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

5. — Parmi les surfaces F', il en est ∞^3 dégénérés en la surface $\Delta = 0$ et un plan. A la surface $\Delta = 0$ correspond sur V l'intersection Ω de cette variété avec l'espace σ.

L'ordre de Ω est égal au nombre de points de rencontre d'une courbe C' avec la surface $\Delta = 0$ en dehors de Γ, c'est-à-dire à $\frac{1}{6} n(n^2-1)$.

A un plan de l'espace Σ correspond sur V une surface G dont l'ordre est égal à celui d'une courbe C', c'est-à-dire à $\frac{1}{3}(n^2+3n+4)$. Les surfaces G sont rationnelles et forment un réseau homaloïdal $|G|$. Deux surfaces G se coupent suivant une courbe rationnelle d'ordre $n+2$.

Un hyperplan passant par l'espace σ coupe V suivant une surface $\Omega + G$.

Une surface F' coupe la surface $\Delta = 0$ en dehors de Γ suivant une courbe d'ordre $\frac{1}{2} n(n+1)$. C'est une courbe qui appartient à la famille des courbes Γ_n tracées sur la surface $\Delta = 0$. On en déduit que les sections hyperplanes de la surface Ω sont de genre

$$\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(2n+3).$$

La surface $\Delta = 0$ étant dépourvu de points singuliers, cette surface et par conséquent Ω ont les genres

$$p_a = p_g = \frac{1}{6} n(n-1)(n-2), \quad p^{(1)} = (n+1)(n-3)^2 - 1.$$

6. — Au domaine d'un point de la courbe Γ correspond une droite sur V et par suite au domaine de la courbe Γ correspond sur V une réglée R.

L'ordre de la réglée R est égal au nombre de points d'appui d'une dourbe C' sur Γ, c'est-à-dire à $\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$.

7. — Nous examinerons maintenant quelques cas particuliers.

Supposons tout d'abord $n = 1$. La courbe Γ est une quintique de genre deux et les surfaces F' sont des surfaces cubiques. Les courbes C' sont des quartiques elliptiques. La variété V est plongée dans un espace S_5 et est l'intersection de deux hyperquadriques passant par une droite σ. Le fait que la variété V est représentée par les surfaces cubiques passant par une quintique gauche de genre deux est connu. Il a été établi par Enriques (2).

Supposons $n = 2$. La courbe Γ est d'ordre 9 et de genre 9. Les surface F' sont du quatrième ordre et les courbes C' d'ordre 7 et de genre 5. La variété V est plongée dans un espace S_6 et est d'ordre 8. Elle est l'intersection de trois hyperquadriques passant par un plan σ. Les sections hyperplanes de la variété V sont des surfaces de genres $p_a = P_4 = 1$, à courbes canonique et pluricanoniques d'ordre zéro. La section de V par une hyperquadrique est une surface dont les sections hyperplanes constituent le système canonique (surfaces projectivement canoniques).

La surface Ω se réduit au plan σ.

Supposons $n = 3$. La courbe Γ est d'ordre 14 et de genre 23. Les surfaces F' sont du cinquième ordre, les courbes C' sont d'ordre 11 et de genre 14. La variété V est d'ordre 15 dans un espace S_7.

La surface Ω, dans l'espace à trois dimensions σ, est d'ordre 4 et ses sections planes sont de genre trois.

Supposons enfin $n = 4$. La courbe Γ est d'ordre 20 et de genre 46. Les surfaces F' sont du sixième ordre, les courbes C' d'ordre 16 et de genre 30. La variété V, plongée dans un espace S_8, est d'ordre 26.

La surface Ω, dans l'espace à quatre dimensions σ, est d'ordre 10 et ses sections hyperplanes sont de genre 11.

Liège, le 6 novembre 1962.

(2) Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche* (Rendiconti Accademia dei Lincei, 1° sem. 1894, pp. 481-487, 536-543. *Memorie scelte di Geometria*, Bologna Zanichelli, 1956, pp. 125-140).