EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége.*
Séance du 20 avril 1944. — N° 4.

Sur les surfaces inscrites dans une surface de Kummer,

par LUCIEN GODEAUX. Membre de la Société.

Dans ses belles recherches sur les surfaces hyperelliptiques, G. Humbert [1] a déterminé les courbes tracées sur une surface de Kummer et a montré que le long de chacune de ces courbes, distincte d'une section plane, il existe une surface inscrite dans la surface de Kummer. Nous nous proposons de montrer que les surfaces inscrites ont en général des points doubles sur la courbe de contact. Nous en déduirons quelques remarques sur les surfaces qui représentent des involutions du second ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique [2].

1. Rappelons tout d'abord les résultats de G. Humbert qui nous sont nécessaires.

La surface de Kummer possède 16 points doubles coniques. Les courbes tracées sur cette surface se répartissent en quatre catégories :

a) Courbes d'ordre $4m$ et de genre $2m^2+1$. Pour $m>1$, il existe une surface d'ordre $2m$ inscrite à la surface le long d'une telle courbe.

b) Courbes d'ordre $4m$ et de genre $2m^2-3$ passant par les 16 points doubles de la surface. Le long d'une de ces courbes, une surface d'ordre $2m$ est inscrite à la surface ($m>1$).

c) Courbes d'ordre $4m$ et de genre $2m^2-1$ passant par huit points doubles. Il existe une surface d'ordre $2m$ inscrite à la surface le long d'une quelconque de ces courbes.

d) Courbes d'ordre $4m+2$ passant par six points doubles, de genre $2m^2+2m$. Le long de chacune de ces courbes il existe une surface d'ordre $2m+1$ inscrite à la surface.

e) Courbes d'ordre $4m+2$ passant par dix points doubles et de genre $2m^2+2m-1$. Le long de chacune de ces courbes il existe une surface d'ordre $2m+1$ inscrite à la surface.

---

[1] *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* (Journal de Mathématiques, 1893) et *Œuvres de G. Humbert*, t. II, 1936 (Paris, Gauthier-Villiers).

[2] Pour la bibliographie de la théorie des involutions, consulter notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient et ind., Paris, Hermann, 1935).

2. Dans la suite, nous utiliserons le raisonnement suivant :

Soient F, Φ deux surfaces algébriques dont l'une au moins est d'ordre pair, se touchant le long d'une courbe C. Désignons par $2n$ l'ordre de F, par m l'ordre de Φ ; la courbe C sera d'ordre mn.

Supposons que la surface F, par exemple, possède ν points doubles coniques situés sur la courbe C. Les plans tangents aux deux surfaces aux points de la courbe C engendrent une développable Δ. Soit M un point quelconque de l'espace. La première polaire de M par rapport à F passe par les points doubles de cette surface et coupe C, en dehors de ces points doubles, en $\delta = mn(2n-1) - \nu$ points. La classe de Δ est égale à δ.

La première polaire du point M par rapport à la surface Φ coupe C en $mn(m-1)$ points parmi lesquels se trouvent les δ points de contact des plans de Δ passant par M. Soit R un point de rencontre distinct des précédents. Si R est simple pour la surface Φ, le plan tangent à cette surface en ce point passe par M ; ce plan est tangent en R à la surface F et la première polaire de M par rapport à F, passant par R, contient la courbe C. Or, ceci n'est possible que si la courbe C est double pour F, puisque le point M est arbitrairement choisi. Nous sommes donc conduit à une absurdité, par conséquent le point R est double (en général conique) pour la surface Φ.

La surface Φ possède donc

$$\mu = mn(m-2n) + \nu$$

points doubles coniques sur la courbe C.

Inversement, si Φ possède μ points doubles coniques sur la courbe C, la surface F possède ν points doubles coniques sur cette courbe.

3. Soient F une surface de Kummer, Φ_{2m} une surface d'ordre $2m$ touchant F le long d'une courbe C d'ordre $4m$ et de genre $2m^2+1$, ne passant par aucun point double de la surface F ($m > 1$).

D'après la propriété qui vient d'être établie, la surface Φ_{2m} possède $8m(m-2)$ points doubles coniques sur la courbe C.

En particulier, pour $m = 2$, on obtient une surface Φ_4 dépourvue de points doubles sur la courbe C, touchant F le long de celle-ci. Les surfaces F et Φ_4 déterminent un faisceau de surfaces du quatrième ordre se touchant le long de la courbe C, d'ordre huit et de genre 9.

4. Considérons maintenant une surface Φ_{2m} d'ordre $2m$ touchant F le long d'une courbe C d'ordre $4m$ et de genre $2m^2 - 3$, passant par les 16 points doubles de la surface F.

La surface Φ_{2m} possède $8(m^2 - 2m + 2)$ points doubles sur la courbe C.

Pour $m = 2$ on obtient une surface Φ_4 possédant 16 points doubles sur la courbe C et cette surface est par conséquent une surface de Kummer. Les surfaces F et Φ_4 déterminent un faisceau de surfaces de Kummer se raccordant le long d'une courbe C d'ordre huit et de genre cinq, dont les seize points doubles se trouvent sur cette courbe. Ce résultat a déjà été obtenu par G. Humbert.

Les groupes G de 16 points doubles des surfaces du faisceau forment une série linéaire sur la courbe C. En effet, si R est un point de C, il existe une et une seule surface du faisceau touchant en R une droite non tangente en ce point à la surface F. Cette surface possède un point double en R et les groupes G forment donc une série d'indice un. D'autre part, cette série est rationnelle puisque les groupes G et les surfaces du faisceau sont en correspondance biunivoque. La série $|G|$ est donc linéaire.

5. Considérons une surface Φ_{2m} d'ordre $2m$ touchant la surface F le long d'une courbe C d'ordre $4m$ passant par huit des seize points doubles de F.

La surface Φ_{2m} possède $8(m-1)^2$ points doubles sur la courbe C.

Pour $m = 1$, on obtient une quadrique Φ_2 dépourvue de points doubles, touchant F le long d'une quartique elliptique C.

Pour $m = 2$, on obtient une surface du quatrième ordre Φ_4 possédant huit points doubles sur la courbe C, d'ordre huit et de genre sept. Les surfaces F et Φ_4 déterminent un faisceau de surfaces se raccordant le long de C et ayant huit points doubles sur cette courbe. Ce faisceau a été rencontré par G. Humbert. Les groupes de huit points doubles des surfaces du faisceau forment, sur la courbe, une série linéaire g^1_8.

6. Considérons une surface Φ_{2m+1} inscrite dans la surface de Kummer F le long d'une courbe C d'ordre $4m+2$ et de genre $2m^2 + 2m$, passant par six des seize points doubles de F.

La surface Φ_{2m+1} possède $8m(m-1)$ points doubles sur la courbe C.

Pour $m = 1$, on obtient une surface cubique Φ_3 touchant F le long d'une courbe C d'ordre six et de genre quatre, passant par six points doubles de F, mais dépourvue de points doubles sur la courbe C.

Pour $m = 2$, on obtient une surface Φ_5, du cinquième ordre, touchant F suivant une courbe C d'ordre dix et de genre douze; cette surface Φ_5 possède 16 points doubles sur la courbe C.

Désignons par Γ les sections planes de Φ_5. Chacun des 16 points doubles de cette surface est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré -2. Nous désignerons par $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{16}$ les seize courbes équivalentes aux 16 points doubles.

L'existence de la surface F touchant Φ_5 le long de C se traduit sur la surface Φ_5 par la relation fonctionnelle

$$4\,\Gamma \equiv 2\,C + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots \gamma_{16}. \tag{1}$$

Sur la surface Φ_5, la courbe C appartient donc à un système linéaire $|C|$ de degré 12 et de genre 12. D'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension de $|C|$ est $r \geq 5$.

La relation fonctionnelle (1) exprime que le long de toute courbe du système $|C|$ il existe une surface du quatrième ordre inscrite dans Φ_5. Si l'on applique le raisonnement fait plus haut (nº 2), on voit que cette surface du quatrième ordre possède six points doubles sur la courbe C.

Les courbes C étant d'ordre dix, découpent sur une section plane Γ, de genre six, de Φ_5, une série d'ordre dix qui ne peut être la série canonique. Celle-ci est en effet découpée sur Γ par les quadriques de l'espace, c'est-à-dire que les courbes du système $|2\Gamma|$ adjoint à $|\Gamma|$ et le système $|2\Gamma|$ ne peuvent contenir les courbes C. Les courbes C découpent donc sur la courbe Γ une série paracanonique g_{10}^4. Par un groupe de cette série passent donc ∞^{r-4} courbes C et par conséquent il y a ∞^{r-5} courbes C comprenant la courbe Γ comme partie. Le long d'une ces courbes dégénérées, il y une surface du quatrième ordre inscrite dans Φ_5; cette surface comprend donc le plan de Γ compté deux fois et est complétée par une quadrique Q passant par 16 points doubles et touchant Φ_5 le long d'une quintique D. La quadrique Q est nécessairement isolée et l'on a $r = 5$.

D'après ce qui précède, nous avons

$$D \equiv C - \Gamma$$

et par conséquent, par la relation (1),

$$2\,\Gamma \equiv 2\,D + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{16}. \tag{2}$$

En appliquant aux surfaces Φ_5 et Q, qui se touchent le long de D, le raisonnement fait plus haut, on voit que Q possède un point double, c'est-à-dire est un cône, le sommet de celui-ci appartenant à la courbe D.

La courbe D est de degré — 3 et de genre 2.

7. On peut arriver par une autre voie à l'existence de la courbe D et de la relation fonctionnelle (2).

Soient

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0$$

respectivement les équations des surfaces F et Φ_5.

Les équations

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad u^2 = f(x, y, z)$$

représentent une surface Φ^* de S_4 irréductible, puisque dans la correspondance (1, 2) entre Φ_5 et Φ^* il y a 16 points de dirama-tion aux points doubles de Φ_5.

La surface Φ_5 contient une involution du second ordre possédant 16 points unis dont Φ_5 est l'image. Le système canonique de Φ_5 est le système $|\Gamma|$ de ses sections planes. La surface Φ_5 a donc les caractères $p_a = p_g = 4$, $p^{(1)} = 6$. En utilisant les relations que nous avons établies dans nos recherches sur les involutions [1], on voit que la surface Φ^* présente les caractères $p_a = 5$, $p^{(1)} = 11$.

Cela étant, le système canonique $|\Gamma^*|$ de Φ^* est ∞^4 au moins; il contient le système partiel ∞^3 transformé de $|\Gamma|$, appartenant à l'involution et un second système partiel appartenant à l'involution et ayant pour points-base les 16 points unis de celle-ci. Aux courbes de ce dernier système correspondent sur Φ_5 des courbes D d'ordre cinq, de genre deux, passant par les 16 points doubles de la surface et le long de chacune desquelles une quadrique est inscrite dans celle-ci.

Il en résulte que ces courbes D satisfont à la relation (2) et sont donc de degré — 3, c'est-à-dire qu'elles forment un système linéaire de dimension zéro. En d'autres termes, il existe une seule courbe D et le système canonique $|\Gamma^*|$ de Φ^* a la dimension $p_g - 1 = 4$ Cette surface est donc régulière.

Sur la surface Φ^*, le système bicanonique $|2\Gamma^*|$ contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution. L'un, dé-

---

(1) Voir notre Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation *(Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914, pp. 289-312).

pourvu de points-base, est le transformé du système bicanonique $|2\Gamma|$ de Φ_5. L'autre est le transformé du système $|C|$ et l'on voit ainsi la raison pour laquelle ce système comprend les courbes $D+\Gamma$. La transformée d'une de ces courbes est en effet une courbe de $|2\Gamma|$ passant par les 16 points unis de l'involution.

8. Nous avons vu que la quadrique Q est un cône; on peut utiliser ce fait pour former l'équation de la surface Φ_5. Nous indiquerons brièvement la méthode à suivre.

Représentons le cône Q sur un plan σ de telle manière qu'à ses sections planes correspondent des cubiques γ_3 ayant un point double A et coupant une droite a en trois points fixes A_1, A_2, A_3. La droite a représente le domaine du sommet O du cône Q.

A la section de Q par une surface du cinquième ordre passant par O correspond dans σ une courbe d'ordre 12 ayant la multiplicité 10 en A et la multiplicité 4 en chacun des points A_1, A_2, A_3. Si la surface du cinquième ordre touche Q le long d'une courbe D, il correspond donc à celle-ci une courbe γ_7 d'ordre sept passant cinq fois par A et deux fois par chacun des points A_1, A_2, A_3.

On peut disposer de la figure de référence de telle sorte que les courbes γ_3 aient pour équation

$$x_3(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_3 x_2^2) + \lambda_4 x_1 x_2 (x_1 - x_2) = 0.$$

Rapportons projectivement ces courbes aux plans de l'espace en posant

$$\frac{X_1}{x_3 x_1^2} = \frac{X_2}{x_3 x_1 x_2} = \frac{X_3}{x_3 x_2^2} = \frac{X_4}{x_1 x_2 (x_1 - x_2)}. \tag{1}$$

Le cône Q a pour équation

$$X_2^2 - X_1 X_3 = 0.$$

L'équation de la courbe γ_7 s'écrira sous la forme

$$x_3^2 \alpha_5(x_1, x_2) + x_3 x_1 x_2 (x_1 - x_2)\, \alpha_3(x_1, x_2) + x_1^2 x_2^2 (x_1 - x_2)^2\, \alpha_1(x_1, x_2) = 0,$$

où α_5, α_3, α_1 sont des formes en x_1, x_2 dont le degré est indiqué par l'indice.

En élevant les deux membres de cette équation au carré, en multipliant par x_3 et en utilisant les équations (1), on obtiendra immédiatement l'équation de Φ_5.

9. Considérons enfin une surface Φ_{2m+1}, d'ordre $2m+1$, passant par dix des points doubles de F et inscrite dans cette surface le long d'une courbe C d'ordre $4m+2$ et de genre $2m^2+2m-1$.

La surface Φ_{2m+1} possède $4\,(2m^2 - 2m + 1)$ points doubles sur la courbe C.

Pour $m = 1$, on obtient une surface cubique Φ_3 possédant quatre points doubles coniques sur la courbe C, d'ordre six et de genre trois.

Pour $m = 2$, on obtient une surface Φ_5 du cinquième ordre possédant 20 points doubles coniques sur la courbe C, d'ordre dix et de genre onze.

Désignons encore sur Γ les sections planes de la surface Φ_5 et par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{20}$ les courbes rationnelles de degré -2 équivalentes aux points doubles de cette surface.

Sur la surface Φ_5, nous avons

$$4\,\Gamma \equiv 2\,C + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{20}. \tag{1}$$

On déduit de cette relation que la courbe C appartient, sur Φ_5, à un système linéaire $|C|$ de degré dix et dont la dimension, d'après le théorème de Riemann-Roch, est $r \geq 4$.

D'après la relation (1), il existe une surface du quatrième ordre tangente à Φ_5 le long de chaque courbe de $|C|$ et cette surface possède dix points doubles coniques sur la courbe C envisagée. Cela étant, observons que les courbes C découpent sur une section plane Γ de Φ_5 une série d'ordre six qui est nécessairement une série paracanonique, de dimension quatre. Si $r > 4$, il existe donc ∞^{r-4} courbes C qui comprennent Γ comme partie. La surface du quatrième ordre inscrite dans Φ_5 le long d'une de ces courbes dégénérées se compose du plan de Γ compté deux fois et d'une quadrique Q, passant par les 20 points doubles de Φ_5 et touchant cette surface le long d'une courbe D d'ordre cinq.

On a

$$C \equiv D + \Gamma$$

et par suite

$$2\,\Gamma \equiv 2\,D + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{20}.$$

Nous allons montrer, en reprenant le raisonnement du n° 2, que la courbe D ne peut exister. La quadrique Q est certainement irréductible et possède au plus un point double. Le plan polaire d'un point M par rapport à cette quadrique coupe la courbe D, en dehors du point double éventuel, en 10 ou 9 points. La polaire de M par rapport à Φ_5 doit donc rencontrer D en $40 - 10 = 30$ ou $40 - 9 = 31$ points doubles pour cette surface, ce qui est impossible.

La quadrique Q et la courbe D n'existant pas, aucune courbe C ne contient une courbe Γ et le système $|C|$ a la dimension $r = 4$.

10. De la relation fonctionnelle (1) on déduit l'existence d'une surface Φ^* contenant une involution I_2 d'ordre deux, présentant 20 points unis et ayant pour image la surface Φ_5.

Par les formules déjà utilisées plus haut on déduit que la surface Φ^* a les caractères $p_a = 4$, $p^{(1)} = 11$. Au système $|\Gamma|$ correspond sur Φ^* un système $|\Gamma^*|$ qui est complet, sans quoi la courbe D existerait. Comme $|\Gamma|$ est le système canonique de Φ_5, $|\Gamma^*|$ est celui de la surface Φ. On en conclut que la surface Φ^* a le genre géométrique $p_g = 4$ et est régulière.

Le système bicanonique $|2\Gamma^*|$ de Φ^* contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I_2 : l'un, privé de points-base, est le transformé du système bicanonique $|2\Gamma|$ de Φ; l'autre, qui a pour points-base les points unis de I_2, est le transformé du système $|C|$. On en conclut que $|2\Gamma^*|$ a la dimension 14. Le bigenre de Φ^* vaut donc $P_2 = 15$.

Considérons le système i-canonique $|i\Gamma^*|$ de Φ^*; il a la dimension $P_i^* - 1 = 5i(i-1) + 4$, le degré $10i^2$ et le genre $5i(i+1)+1$. Il contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I_2 : l'un, dépourvu de points-base, est le transformé du système i-canonique $|i\Gamma|$ de Φ_5 et a la dimension $P_i - 1 = \frac{5}{2}i(i-1) + 4$; l'autre a pour points-base les points unis de I_2 et la dimension $\frac{5}{2}i(i-1) - 1$. Il lui correspond sur Φ_5 un système $|C_i|$ de courbes d'ordre $5i$. Le système $|C_i|$ a le degré $5i^2 - 10$ et le genre $\frac{5}{2}i(i+1) - 4$ + On a

$$2\, i\Gamma \equiv 2\, C_i + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{20}.$$

Pour $i = 2$, on retrouve le système $|C|$.

D'après la relation précédente, il existe une surface d'ordre $2i$, passant par les 20 points doubles de Φ, touchant cette surface le long d'une courbe C_i. Cette surface possède $5(2i^2 - 5i + 4)$ points doubles sur la courbe de contact.

Pour $i = 3$, on trouve donc ∞^{14} surfaces d'ordre six, touchant la surface Φ_5 le long de courbes d'ordre 15, de genre 26, passant par les points doubles de Φ_5.

Pour $i = 5$, on obtient ∞^{49} surfaces du cinquième ordre touchant la surface Φ_5 le long de courbes d'ordre 25, de genre 71, passant par les points doubles de Φ_5.

On a d'ailleurs

$$C_i \equiv C_{i-1} + \Gamma.$$

11. Supposons $m = 3$. Nous obtenons une surface Φ_7 d'ordre sept touchant F suivant une courbe C d'ordre 14 et de genre 23, sur laquelle elle possède 52 points doubles.

En désignant par Γ les sections planes de Φ_7 et par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{52}$ les courbes rationnelles de degré -2 équivalentes aux points doubles de cette surface, on a, sur celle-ci,

$$4\Gamma \equiv 2C + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{52}.$$

La courbe C est de degré 2 et appartient, d'après le théorème de Riemann-Roch à un système linéaire de dimension $r \geq 0$, car Φ_7 est de genre $p_a = 20$ et C ne peut être une courbe spéciale, le système canonique étant découpé par les surfaces cubiques.

Sur la surface Φ_7, on a

$$|\Gamma'| = |4\Gamma|$$

et par conséquent C coupe une courbe Γ suivant un groupe semi-canonique de cette courbe. Ce groupe est isolé et si l'on avait $r > 0$, il existerait une courbe du système $|C|$ comprenant une courbe Γ comme partie. Mais alors, il existerait une quadrique inscrite dans la surface Φ_7 et passant par les 52 points doubles de celle-ci. Cette quadrique devrait contenir la courbe C, ce qui est absurde.

On en conclut que la courbe C est isolée.

Supposons maintenant $m > 3$. En désignant cette fois par Γ les sections planes de Φ_{2m+1} et par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$ les courbes rationnelles de degré -2 équivalentes aux

$$\nu = 4(2m^2 - 2m + 1)$$

point doubles de cette surface, on aura

$$4\Gamma \equiv 2C + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\nu. \tag{1}$$

La courbe C est de degré $2(-2m^2 + 6m + 1)$ négatif; donc elle est isolée.

Dans tous les cas, l'existence de la courbe C satisfaisant à la relation (1) sur la surface Φ_{2m+1} entraîne l'existence d'une surface Φ^* contenant une involution du second ordre ayant ν points unis, dont Φ_{2m+1} est l'image.

Liége, le 7 avril 1944.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)