GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les involutions de genres un appartenant à une surface algébrique,

par Lucien Godeaux, correspondant de l'Académie.

(*Seconde note.*)

Dans notre première Note (1), nous avons montré que si une involution d'ordre premier p, de genres *un* ($p_a = P_4 = 1$), n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartient à une surface algébrique régulière de genre p_a supérieur à l'unité, on a $p = 3$, 5, 7 ou 13. Nous avions déjà montré, par des exemples, que les cas $p = 3$ et $p = 5$ se présentent effectivement. Dans cette seconde Note, nous nous proposons d'établir l'existence du cas $p = 13$ en construisant un exemple d'une telle involution.

1. Soit F une surface algébrique régulière possédant une involution I_{13}, d'ordre treize, n'ayant qu'un nombre fini de points unis et de genres un. Nous avons établi que F a le genre arithmétique (égal au genre géométrique) $p_a = 4$ et le genre linéaire $p^{(4)} = 6$. On peut donc prendre pour modèle projectif de la surface F une surface du cinquième ordre dépourvue de courbes multiples. L'involution I_{13} sera engendrée, sur F, par une homographie de période treize conservant cette surface. Nous avons, en outre, établi que l'involution I_{13} possède trois points unis.

(1) *Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1938, pp. 583-592.

Considérons l'homographie H d'équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^9 x_3 : \varepsilon^3 x_4 \; ,$$

où ε est une racine primitive treizième de l'unité. Elle transforme en elle-même la surface F d'équation

$$a_1 x_1^5 + a_2 x_2^4 x_3 + a_3 x_3^4 x_4 + a_4 x_4^4 x_2 + a_5 x_1^2 x_2 x_3 x_4 = 0,$$

dépourvue de points double et par conséquent de genres $p_a = 4$, $p^{(1)} = 6$.

Sur F, l'homographie H engendre une involution d'ordre treize, I_{13}, ayant les trois points unis O_2 (0, 1, 0, 0), O_3 (0, 0, 1, 0), O_4 (0 0, 0, 1).

Pour obtenir une image Φ de l'involution I_{13}, posons

$$\frac{X_1}{x_1^5} = \frac{X_2}{x_2^4 x_3} = \frac{X_3}{x_3^4 x_4} = \frac{X_4}{x_4^4 x_2} \, .$$

En éliminant les x entre ces équations et l'équation de F, nous obtenons l'équation de la surface Φ sous la forme

$$(a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4)^5 + a_5^5 X_1^2 X_2 X_3 X_4 = 0.$$

Cette surface, du cinquième ordre, possède la droite double r d'équations

$$X_1 = 0 \; , \quad a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 = 0 \; .$$

A cette droite double est infiniment voisine une seconde droite double située dans le plan $X_1 = 0$, car ce plan a un contact du quatrième ordre avec la surface le long de la droite double r.

La surface Φ possède par conséquent comme i-adjointe le plan $X_1 = 0$ compté i fois; par conséquent, elle a une courbe i-canonique d'ordre zéro. En particulier, on a $p_g = P_4 = 1$ et la surface Φ étant régulière comme la surface F, on a $p_a = 1$. La surface Φ est donc bien de genres un.

2. On peut confirmer ce résultat en transformant la surface Φ en une surface du quatrième ordre.

Effectuons la transformation quadratique

$$Y_1 : Y_2 : Y_3 : Y_4 = \varphi^2 : X_1 X_2 : X_1 X_3 : X_1 \varphi \; ,$$

où nous avons posé

$$\varphi = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 \ .$$

Les formules inverses de cette transformation sont

$$X_2 : X_2 : X_3 : \varphi = Y_4^2 : Y_1 Y_2 : Y_1 Y_3 : Y_1 Y_4 \ ;$$

elle fait correspondre à la surface Φ la surface Φ' d'équation

$$a_4 Y_1^3 Y_4 + a_5^5 Y_2 Y_3 (Y_1 Y_4 - a_1 Y_4^2 - a_2 Y_1 Y_2 - a_3 Y_1 Y_3) = 0.$$

La surface Φ' est du quatrième ordre et est dépourvue de courbes multiples. Elle possède quatre points doubles biplanaires, à savoir les points (0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) et le point

$$Y_1 = Y_4 = 0 \ , \quad a_2 Y_2 + a_3 Y_3 = 0 \ .$$

Ces singularités étant sans influence sur les genres de la surface, celle-ci est donc bien de genres un.

3. Nous avons établi qu'à chacun des points unis de l'involution I_{13} sont infiniment voisins, dans une direction, cinq points infiniment voisins successifs unis dont le dernier est uni parfait et, dans une seconde direction, dix points unis infiniment voisins successifs dont le dernier est uni parfait. Nous allons vérifier qu'il en est bien ainsi. A cause de la symétrie des équations, il suffira d'ailleurs de le vérifier pour l'un des points unis, par exemple pour O_2.

Considérons, sur la surface F, le système $|C|$ découpé par les surfaces

$$\lambda_0 x_2^5 + \lambda_1 x_2^2 x_1^2 x_4 + \lambda_2 x_2 x_3^3 x_4 + \lambda_3 x_1^3 x_3^2 + \lambda_4 x_1 x_3 x_4^3 = 0.$$

Les courbes C passant par le point uni O_2 sont découpées sur F par les surfaces

$$\lambda_1 x_2^2 x_1^2 x_4 + \lambda_2 x_2 x_3^3 x_4 + \lambda_3 x_1^3 x_3^2 + \lambda_4 x_1 x_3 x_5^3 = 0 \ ; \qquad (1)$$

elles ont un point triple en O_2, deux tangentes coïncidant avec la droite $x_1 = x_3 = 0$ et une avec la droite $x_3 = x_4 = 0$.

Pour examiner la singularité des courbes C aux points infiniment voisins de O_2, effectuons la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_4 : y_2^2 : y_3 y_4 : y_2 y_4 \ , \qquad (T)$$

qui fait correspondre aux points infiniment voisins de O_2 les points du plan $y_4 = 0$ et, en particulier, au point infiniment voisin de O_2 sur la droite $x_1 = x_3 = 0$, le point (0, 1. 0, 0).

A la surface F correspond la surface F′ d'équation

$$a_1 y_1^5 y_4^4 + a_2 y_2^8 y_3 + a_3 y_2 y_3^4 y_4^4 + a_4 y_2^6 y_4^3 + a_5 y_2^3 y_1^2 y_3 y_4^3 = 0$$

et à la surface (1),

$$\lambda_1 y_2^5 y_1^2 + \lambda_2 y_2^3 y_3^3 y_4 + \lambda_3 y_1^3 y_3^2 y_4^2 + \lambda_4 y_2^3 y_1 y_3 y_4^2 = 0 . \tag{2}$$

On voit donc qu'au point O_2 est infiniment voisin, sur la droite $x_1 = x_3 = 0$, un point double pour les courbes C passant par O_2.

Effectuons deux fois de suite la transformation T sur les surfaces F′ et (2). Il vient respectivement

$$a_1 y_1^5 y_4^{12} + a_2 y_2^{16} y_3 + a_3 y_2^3 y_3^4 y_4^{10} + a_4 y_2^{16} y_1 + a_5 y_2^7 y_1^2 y_3 y_4^7 = 0 \tag{F''}$$

$$\lambda_1 y_2^{11} y_1^2 + \lambda_2 y_2^7 y_3^3 y_4^3 + \lambda_3 y_4^3 y_3^2 y_4^8 + \lambda_4 y_2^9 y_1 y_3 y_4^2 = 0 . \tag{3}$$

La courbe commune à ces deux surfaces, transformée par T^3 d'une courbe C passant par O_2, a un point double en (0, 1, 0, 0), les deux tangentes étant confondues avec la droite

$$y_1 = 0 , \quad a_2 y_3 + a_4 y_4 = 0 . \tag{4}$$

Les courbes C passant par O_2 ont donc trois points doubles infiniment voisins successifs de O_2, le premier étant sur $x_1 = x_3 = 0$.

Pour simplifier l'écriture, disposons du point unitaire de façon à pouvoir poser $a_2 = a_4 = 1$. Effectuons ensuite sur les surfaces F″ et (3) la transformation

$$y'_2 : y'_2 : y'_3 : y'_4 = y_1 y_4 : y_2^2 : (y_3 - y_2) y_4 : y_2 y_4 ; \tag{T_1}$$

nous obtenons

$$a_1 y_1^5 y_4^{16} + y_2^{20} y_3 + a_3 y_2^4 (y_3 - y_1)^4 y_4^{13} + \\ + a_5 y_2^9 y_1^2 y_3 (y_3 - y_2) y_4^8 = 0 , \tag{F'''}$$

$$\lambda_1 y_2^{14} y_1^2 + \lambda_2 y_2^9 (y_3 - y_2)^3 y_4^4 + \lambda_3 y_1^3 (y_3 - y_2)^2 y_4^{11} + \\ + \lambda_4 y_2^{12} y_1 (y_3 - y_2) y_4^2 = 0 . \tag{5}$$

La courbe commune à ces deux surfaces, transformée d'une courbe C passant par O_2, possède un point double en $(0, 1, 0, 0)$, les deux tangentes étant confondues avec la droite $y_1 = y_3 = 0$. La courbe commune aux surfaces F'' et (3) possède donc un point double infiniment voisin de $(0, 1, 0, 0)$ sur la droite (4).

Effectuons la transformation T sur les surfaces F''' et (5); il vient

$$a_1\, y_1^5\, y_4^{20} + y_2^{24}\, y_3 + a_3\, y_2^5\, (y_3\, y_4 - y_2^2)\, y_4^{12} + \\ + a_5\, y_2^{10}\, y_1^2\, y_3\, (y_3\, y_4 - y_2^2)\, y_4^{10} = 0\,,$$

$$\lambda_1\, y_2^{17}\, y_1^2 + \lambda_2\, y_2^{11}\, (y_3\, y_4 - y_2^2)^3\, y_4^2 + \lambda_3\, y_1^3\, (y_3\, y_4 - y_2^2)^2\, y_4^{12} + \\ \lambda_4\, y_2^{15}\, y_1\, y_4\, (y_3\, y_4 - y_2^2) = 0\,.$$

La courbe commune à ces deux surfaces possède un point double en $(0, 1, 0, 0)$, les tangentes

$$y_3 = 0\,, \quad \lambda_1\, y_1^2 + \lambda_2\, y_4^2 = 0$$

étant variables avec la surface (1).

On conclut de tout ceci que les courbes C passant par O_2 ont en commun cinq points doubles infiniment voisins successifs dont le premier est sur la droite $x_1 = x_3 = 0$. Ces points sont évidemment unis pour l'involution I_{13} et le dernier est uni parfait.

4. On pourrait démontrer de la même manière que les courbes C passant par O_2 ont en commun dix points simples infiniment voisins successifs, nécessairement unis pour l'involution I_{13}, le dernier étant uni parfait. Il suffit d'effectuer, sur F et sur la surface (1), quatre fois de suite la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1\, y_2 : y_2^2 : y_1\, y_3 : y_1\, y_4 \qquad (T')$$

puis, après avoir disposé du point unitaire pour pouvoir poser $a_1 = a_2 = 1$, la transformation

$$y'_1 : y'_2 : y'_3 : y'_4 = y_1\, y_2 : y_2^2 : y_1\, (y_2 - y_3) : y_1\, y_4\,.$$

On effectuera enfin à nouveau cinq fois de suite la transformation T'. Nous nous bornerons à ces indications, les calculs ne présentant aucune difficulté.

Liége, le 17 avril 1939.