EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége,*
Séance du 20 avril 1939, n° 4.

Sur une surface algébrique de genre un contenant un faisceau de courbes elliptiques,

par L. GODEAUX, Membre de la Société.

Dans cette brève note, nous nous proposons de construire une surface algébrique dont la courbe canonique, unique, est formée d'une courbe elliptique comptée deux fois. Cette courbe, comptée quatre fois, appartient totalement à un faisceau de courbes dont les éléments sont les courbes bicanoniques de la surface. Celle-ci, que nous obtenons comme surface image d'une involution d'ordre sept, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique du sixième ordre, nous a paru posséder des particularités suffisamment intéressantes pour être signalée [1].

1. Considérons, dans l'espace ordinaire, la surface F du sixième ordre d'équation

$$a_0 x_1^3 x_2 x_3 x_4 + x_1^2 (a_1 x_1^4 + a_2 x_2^3 x_4 + a_3 x_3^3 x_2 + a_4 x_4^3 x_3) + a_5 x_2^2 x_3^2 x_4^2 + b_2 x_2^5 x_3 + b_3 x_3^5 x_4 + b_4 x_4^5 x_2 + x_1 (c_2 x_3^3 x_4^2 + c_3 x_4^3 x_2^2 + c_4 x_2^3 x_3^2) = 0.$$

---

(1) On trouvera les propriétés des involutions dont nous faisons usage dans notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

Elle est transformée en elle-même par l'homographie H, de période sept,

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^4 x_4,$$

où ε est une racine primitive septième de l'unité. Sur la surface F, H engendre une involution I_7 d'ordre sept, ayant trois points unis O_2 (0, 1, 0, 0), O_3 (0, 0, 1, 0) et O_4 (0, 0, 0, 1).

Le point O_2 possède deux points unis dans son domaine du premier ordre, à savoir les points qui se trouvent sur les droites $x_3 = x_4 = 0$, $x_1 = x_3 = 0$. Nous allons montrer que ce dernier point est uni parfait pour l'involution I_7.

Effectuons la transformation quadratique

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_4 : y_2^2 : y_3 y_4 : y_2 y_4,$$

qui fait correspondre au domaine du premier ordre du point O_2 le plan $y_1 = 0$ et en particulier au point infiniment voisin de O_2 sur la droite $x_1 = x_3 = 0$, le point O'_2 ($y_1 = y_3 = y_4 = 0$, $y_2 = 1$). A la surface F correspond la surface F′ d'équation

$$\begin{aligned} a_0 y_1^3 y_2^3 y_3 y_4^4 + y_1^2 y_4 (a_1 y_1^4 y_4^4 + a_2 y_1^2 y_2^7 y_4^2 + a_3 y_2^2 y_3^2 y_4^2 + a_4 y_2^3 y_3 y_4^4) \\ + a_5 y_2^6 y_3^2 y_4^3 + b_2 y_2^{10} y_3 + b_3 y_2 y_5^5 y_4^5 + b_4 y_2^7 y_4^4 \\ + y_1 y_2^2 y_4^2 (c_2 y_3^3 y_4^3 + c_3 y_2^3 y_4^3 + c_4 y_2^4 y_3^2) = 0 \end{aligned}$$

et à l'homographie H, l'homographie H′ d'équations

$$y'_1 : y'_2 : y'_3 : y'_4 = y_1 : \varepsilon^4 y_2 : \varepsilon^2 y_3 : y_4.$$

Dans le plan $y_3 = 0$, tangent en O'_2 à la surface F′, l'homographie H′ détermine une homologie de centre O'_2, ce qui démontre notre assertion.

La symétrie des équations de F et de H montre que les points infiniment voisins de O_3 sur $x_2 = x_4 = 0$ et de O_4 sur $x_1 = x_2 = 0$ sont unis parfaits pour l'involution I_7.

2. Pour obtenir une surface image de l'involution I_7, considérons le système linéaire de surfaces

$$\lambda_0 x_1 x_2 x_3 x_4 + \lambda_1 x_1^4 + \lambda_2 x_2^3 x_4 + \lambda_3 x_3^3 x_2 + \lambda_4 x_4^3 x_3 = 0, \qquad (1)$$

transformé en lui-même par H. Rapportons projectivement les surfaces de ce système aux hyperplans d'un espace linéaire S_4 en posant

$$\frac{X_0}{x_1 x_2 x_3 x_4} = \frac{X_1}{x_1^4} = \frac{X_2}{x_2^3 x_4} = \frac{X_3}{x_3^3 x_2} = \frac{X_4}{x_4^3 x_3}.$$

A la surface F correspond une surface Φ, image de l'involution I_7, d'équations

$$X_1 X_2 X_3 X_4 = X_0^4,$$
$$a_0 X_0^3 + X_0^2(a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4) + X_0(c_2 X_3 X_4 + c_3 X_4 X_2 + c_4 X_2 X_3)$$
$$+ b_2 X_2^2 X_3 + b_3 X_3^2 X_4 + b_4 X_4^2 X_2 + a_5 X_2 X_3 X_4 = 0.$$

La surface Φ, du douzième ordre, est normale, car on ne peut adjoindre au système linéaire (1) une surface telle que le système obtenu soit composé au moyen de l'involution I_7.

Si une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, appartenant à une surface algébrique de genres p_a, $p^{(1)}$, possède α points unis non parfaits à chacun desquels est infiniment voisin un point uni parfait, les genres π_a, $\pi^{(1)}$ d'une surface image de l'involution sont donnés par [1]

$$12(p_a + 1) = 12p(\pi_a + 1) + \tfrac{1}{2}\alpha(p-1)(p-11),$$
$$p^{(1)} - 1 = p(\pi^{(1)} - 1) + \tfrac{1}{2}\alpha(p-3)^2.$$

Actuellement, pour la surface F, on a $p_a = 10$, $p^{(1)} = 25$, $p = 7$, $\alpha = 3$. On en déduit que les genres de la surface Φ sont $\pi_a = 1$, $\pi^{(1)} = 1$. D'autre part, F étant régulière, il en est de même de Φ et le genre géométrique de cette surface est $\pi_g = 1$.

3. A la courbe canonique de la surface Φ correspond, sur F, une courbe canonique de cette surface passant deux fois par les points unis O_2, O_3, O_4 et par les points unis parfaits infiniment voisins. Les courbes canoniques de F étant découpées par les quadriques, la transformée de la courbe canonique de Φ est découpée par la quadrique $x_1^2 = 0$; c'est donc la courbe

$$x_1 = 0, \qquad b_2 x_2^5 x_3 + b_3 x_3^5 x_4 + b_4 x_4^5 x_2 + a_5 x_2^2 x_3^2 x_4^2 = 0, \qquad (2)$$

comptée deux fois. La courbe canonique de Φ est par suite la cubique elliptique

$$X_0 = X_1 = 0, \quad b_2 X_2^2 X_3 + b_3 X_3^2 X_4 + b_4 X_4^2 X_2 + a_5 X_2 X_3 X_4 = 0, \qquad (3)$$

comptée deux fois.

Les courbes bicanoniques de F sont découpées sur cette surface par les surfaces du quatrième ordre. Parmi celles-ci se trouve la surface $x_1^4 = 0$ et la courbe (2), comptée quatre fois, est une courbe bicanonique de F. A cette courbe correspond, sur

[1] Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bull. de l'Acad. Roy. de Belg.*, 1935, pp. 338-344).

la surface Φ, la courbe (3) comptée quatre fois. Il semblerait, d'après ceci, que le système bicanonique de Φ soit le système de ses sections hyperplanes, mais il n'en est rien, car les courbes bicanoniques de Φ étant les adjointes de la courbe elliptique (3), ne peuvent rencontrer celle-ci; les hyperplans découpant sur Φ les courbes bicanoniques de cette surface doivent rencontrer la courbe (3) en des points singuliers de la surface. Ces points singuliers doivent d'ailleurs correspondre aux points unis de l'involution I_7.

On voit aisément qu'aux points unis O_2, O_3, O_4 de I_7 correspondent respectivement les points (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1). Par conséquent, les courbes bicanoniques de Φ sont découpées sur cette surface par les hyperplans

$$X_1 = \lambda X_0 ;$$

elles forment un faisceau comprenant comme composante fixe la courbe (3).

La surface Φ a le bigenre $P_2 = 2$.

4. Les résultats qui viennent d'être obtenus peuvent d'ailleurs être contrôlés de la manière suivante :

Projetons la surface Φ du point (0, 1, 0, 0, 0) sur l'hyperplan $X_1 = 0$. Le centre de projection étant un point sextuple de la surface, nous obtenons une surface du sixième ordre Φ' d'équation

$$\begin{aligned} a_1 X_0^6 + X_2 X_3 X_4 [a_0 X_0^3 + X_0^2 (a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4) \\ + X_0 (c_2 X_3 X_4 + c_3 X_4 X_2 + c_4 X_2 X_3)] \\ + X_2 X_3 X_4 (b_2 X_2^2 X_3 + b_3 X_3^2 X_4 + b_4 X_4^2 X_2) + a_5 X_2^2 X_3^2 X_4^2 = 0. \end{aligned}$$

Le point O'_2 (0, 1, 0, 0) est triple pour cette surface, le cône tangent en ce point étant $X_3^2 X_4 = 0$.

Effectuons la transformation

$$X_0 : X_2 : X_3 : X_4 = Y_1 Y_2 : Y_2^2 : Y_1 Y_3 : Y_2 Y_4 ,$$

qui fait correspondre au domaine du point O'_2 le plan $Y_1 = 0$ et en particulier au point infiniment voisin de O'_2 sur la droite $X_3 = X_4 = 0$, le point (0, 1, 0, 0).

A la surface Φ' correspond la surface

$$\begin{aligned} a_0 Y_1^3 Y_2^6 + Y_1 Y_2^2 Y_3 Y_4 [a_0 Y_1 Y_2^3 + Y_2^2 (a_2 Y_2^2 + a_3 Y_1 Y_3 + a_4 Y_1 Y_4)] \\ + Y_1 Y_2^3 Y_3 Y_4 (c_2 Y_1 Y_3 Y_4 + c_2 Y_2^2 Y_4 + c_3 Y_2^2 Y_3) \\ + Y_2^2 Y_3 Y_4 (b_2 Y_2^4 Y_3 + b_3 Y_1^2 Y_3^2 Y_4 + b_4 Y_1 Y_2^2 Y_4^2) + a_5 Y_1 Y_2^4 Y_3^2 Y_4^2 = 0. \end{aligned}$$

Le point (0, 1, 0, 0) est triple conique et la droite $Y_1=Y_3=0$ est double pour cette surface. Par conséquent, le point triple O'_2 de la surface Φ' possède, dans son domaine du premier ordre, un point triple sur la droite $X_3=X_4=0$ et une droite double dans le plan $X_3=0$.

On démontre de même qu'au point triple O'_3 (0, 0, 1, 0) de la surface Φ' sont infiniment voisins un point triple sur la droite $X_2=X_4=0$ et une droite double dans le plan $X_4=0$. Au point triple O'_4 (0, 0, 0, 1) de Φ' sont infiniment voisins un point triple sur la droite $X_2=X_3=0$ et une droite double dans le plan $X_2=0$.

Les quadriques adjointes à la surface Φ' doivent donc passer par les points triples O'_2, O'_3, O'_4 en y touchant respectivement les plans $X_3=0$, $X_4=0$, $X_2=0$. Il est facile de voir qu'il existe une seule de ces quadriques, d'équation $X_0^2=0$.

Les surfaces du quatrième ordre biadjointes à Φ' doivent, soit passer doublement par O'_2, O'_3, O'_4, les cônes tangents en ces points étant respectivement $X^2{}_3=0$, $X^2{}_4=0$, $X^2{}_2=0$, soit passer triplement par les mêmes points en y touchant respectivement les plans $X_3=0$, $X_4=0$, $X_2=0$. On trouve ainsi un faisceau de surfaces

$$X_0(X_0^3+\lambda X_2X_3X_4)=0,$$

ce qui confirme les résultats obtenus plus haut.

On observe que les droites

$$X_0=X_2=0, \qquad X_0=X_3=0, \qquad X_0=X_4=0$$

sont exceptionnelles.

5. Les surfaces du sixième ordre triadjointes à la surface Φ' ont pour équations

$$\lambda_0X_0^6+\lambda_1X_0^3X_2X_3X_4+\lambda_2X_2^2X_3^2X_4^2=0;$$

il leur correspond les surfaces

$$\lambda_0x_1^6+\lambda_1x_1^3x_2x_3x_4+\lambda_2x_2^2x_3^2x_4^2=0$$

triadjointes à la surface F.

Les courbes tricanoniques de la surface Φ sont donc découpées sur celle-ci par les couples d'hyperplans

$$\lambda_0X_1^2+\lambda_1X_0X_1+\lambda_2X_0^2=0;$$

elles sont formées au moyen de couples de courbes bicanoniques. On a $P_3=3$.

Liége, le 19 avril 1939.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)