EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
Séance du 19 janvier 1939, n° 1.

Sur la construction de variétés algébriques analogues à la surface d'Enriques,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

On sait que M. Enriques a construit une surface algébrique de genres zéro et de bigenre un ($p_a = p_g = 0$, $P_2 = P_6 = 1$), possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro [1]. Plus tard, il a montré qu'une telle surface est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), ayant une courbe canonique d'ordre zéro [2]. On peut se demander dans quelle mesure ces propriétés peuvent s'étendre aux variétés algébriques à plusieurs dimensions.

Dans quelques travaux récents [3], nous avons construit des variétés algébriques à trois dimensions, dépourvues de surface canonique, mais possédant une surface bicanonique, ou tricanonique..., d'ordre zéro. Ces variétés ont été obtenues comme images d'involutions ayant un nombre fini de points unis, appar-

---

(1) Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche (*Memorie della Soc. ital. delle Scienze*, detta dei XL, 1896, pp. 1-81). On trouvera la bibliographie relative à cette question dans notre exposé sur *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et gèométique nuls* (Paris, Hermann, 1934).

(2) Un' osservazione relativa alle superficie di bigenre uno (*Rendiconto della R. Accad. di Bologna*, 1907-1908, pp. 40-45).

(3) Sur les involutions du second ordre appartenant à certaines variétés algébriques à trois dimensions (*C. R.*, déc. 1935, pp. 1169-1170); Sur une variété algébrique à trois dimensions de bigenre un (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1937, pp. 93-101); Sur quelques variétés algébriques à trois dimensions ayant des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro (*Idem*, pp. 110-118); Une variété algébrique à trois dimensions sur laquelle l'opération d'adjonction a la période trois (*Idem*, pp. 335-342); Remarque sur les variétés algébriques de bigenre un (*Idem*, pp. 525-531); Sur deux involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (*Bull. des Sciences mathém.*, 1937, pp. 82-96); Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (*Annales de l'École normale supér.*, 1937, pp. 55-79); *Sur les variétés algébriques à trois dimensions de genres un contenant des involutions cycliques* (Soc. Mathém. de France, Conférences de la Réunion internationale des Mathématiciens, Paris, 1938); Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique de genres un (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1937, pp. 680-684).

tenant à des variétés possédant des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro; elles ne peuvent cependant pas être considérées comme des généralisations de la surface d'Enriques, parce qu'elles possèdent des points singuliers de diramation.

Considérons au contraire une variété algébrique V_n, à n dimensions, ayant des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro, possédant une involution I_p, cyclique, d'ordre p, privée de points unis. Dans quelles conditions la variété Ω_n, image de cette involution, sera-t-elle dépourvue de variété canonique, tout en possédant certaines variétés pluricanoniques d'ordre zéro? La réponse à cette question dépend de la solution du problème suivant : Soit W_n variété algébrique à n dimensions possédant une involution cyclique I_p d'ordre p, privée de points unis; quel est le comportement du système canonique de la variété W_n vis-à-vis de l'involution I_p?

Nous avons pu récemment répondre à cette question, dans le cas où le système adjoint à un système linéaire de variétés à $n-1$ dimensions tracées sur la variété W_n découpe un système complet sur une variété du système envisagé (1). Précisément, le système canonique de la variété W_n possède p systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_p; l'un, de dimension p_g-1, est le transformé du système canonique de la variété image de I_p; les autres ont la dimension p_g ou p_g-2, suivant que n est pair ou impair. Ce résultat va nous permettre d'établir, sous certaines conditions de régularité, l'existence de variétés algébriques à un nombre pair de dimensions, dépourvues de variété canonique, mais possédant une variété bicanonique d'ordre zéro.

1. Soit V_{2n} une variété algébrique à $2n$ dimensions, telle que :

1° Tout système linéaire de variétés à $2n-1$ dimensions, tracées sur V_{2n}, soit son propre adjoint;

2° Le système caractéristique d'un système linéaire soit complet;

3° Sur toute variété à $2n-1$ dimensions tracée sur V_{2n}, le système adjoint à un système linéaire de variétés à $2n-2$ dimensions découpe un système complet sur une de ces variétés.

Dans ces conditions, la variété V_{2n} possède des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.

Supposons que la variété V_{2n} possède une involution cyclique I_p,

---

(1) Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques (*Bull. des Sciences mathém.*, 1938, pp. 291-297).

d'ordre premier p, dépourvue de points unis et soit Ω_{2n} une variété image de cette involution.

Construisons sur V_{2n} un système linéaire complet $|F|$, de variétés algébriques à $2n-1$ dimensions, contenant p systèmes linéaires partiels $|F_1|, |F_2|, \ldots, |F_p|$ composés au moyen de l'involution I_p (¹).

Soient $|\Phi_1|, |\Phi_2|, \ldots, |\Phi_p|$ les systèmes linéaires (complets) de variétés $2n-1$ dimensions correspondant, sur Ω_{2n}, aux systèmes $|F_1|, |F_2|, \ldots, |F_p|$.

Désignons par p_g le genre géométrique des variétés Φ_1, et considérons les systèmes linéaires $|(\Phi_1\,\Phi_1)|, |(\Phi_1\,\Phi_2)|, \ldots, |(\Phi_1\,\Phi_p)|$ découpés sur une variété Φ_1 par les variétés $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$. L'un de ces systèmes est le système canonique de la variété Φ_1 envisagée et a la dimension p_g-1; les autres ont la dimension p_g-2.

Supposons en premier lieu que $|\Phi_1|$ soit son propre adjoint. Le système caractéristique $|(\Phi_1\,\Phi_1)|$ d'une variété Φ_1 a la dimension p_g-1 et $|\Phi_1|$ a la dimension p_g. Le système $|\Phi_2|$ a la dimension p_g-2.

Le système $|\Phi_2|$ est son propre adjoint et comme il a la dimension p_g-2, le genre géométrique d'une variété Φ_2 est p_g-2. Les variétés Φ_1 découpent, sur une variété Φ_2, un système de dimension p_g-4, ce qui est absurde, puisqu'une variété Φ_1 ne peut contenir une variété Φ_2 comme partie. On en conclut que sur la variété Ω_{2n}, un système linéaire ne peut être son propre adjoint.

Supposons donc que le système canonique d'une variété Φ_1 soit découpé par un des systèmes $|\Phi_2|, \ldots, |\Phi_p|$, par exemple par $|\Phi_2|$. Le système $|\Phi_2|$ a la dimension p_g-1; le système $|(\Phi_1\,\Phi_1)|$ a la dimension p_g-2, donc $|\Phi_1|$ a la dimension p_g-1. Les systèmes $|\Phi_3|, \ldots, |\Phi_p|$ ont la dimension p_g-2.

Le système $|\Phi_2|$ ne peut être son propre adjoint et sur une variété Φ_2, le système canonique est donc découpé par celui des systèmes $|\Phi_1|, |\Phi_3|, \ldots, |\Phi_p|$ qui a la dimension maximum, c'est-à dire par $|\Phi_1|$. Les variétés Φ_2 ont donc le genre géométrique p_g et l'on a

$$|\Phi_1'| = |\Phi_2|, \quad |\Phi_2'| = |\Phi_1|,$$

d'où

$$|\Phi_1''| = |\Phi_1|.$$

(¹) Il suffit de calquer la construction faite dans le cas $n=1$ des surfaces. Voir notre exposé sur *Les Involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

La variété Ω_{2n} est dépourvue de variété canonique, mais possède une variété bicanonique d'ordre zéro.

D'autre part, on a nécessairement $p = 2$.

Une involution cyclique d'ordre premier, privée de points unis, appartenant à la variété V_{2n}, *a nécessairement la période deux; son image est une variété dépourvue de variété canonique, mais possédant une variété bicanonique d'ordre zéro.*

2. Il est aisé de prouver l'existence des variétés dont il vient d'être question en construisant un exemple.

Considérons la variété de Segre W_{2n+1} représentant les points de $n+1$ ponctuelles $s_1, s_2, \ldots, s_{2n+1}$. C'est une va iété à $2n+1$ dimensions, d'ordre $(2n+1)!$ appartenant à un espace linéaire à $2^{2n+1}-1$ dimensions. La section de la variété W_{2n+1} par une hyperquadrique est une variété V_{2n} possédant des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro ([1]).

Donnons-nous, sur chacune des ponctuelles $s_1, s_2, \ldots, s_{2n+1}$, des homographies-involutives $T_1, T_2, \ldots, T_{2n+1}$. A un point P de W_{2n+1}, représentant les points P_1 de s_1, P_2 de s_2, ..., P_{2n+1} de s_{2n+1}, faisons correspondre le point P' qui représente les points P'_1 de s_1 que T_1 fait correspondre à P_1; P'_2 de s_2 que T_2 fait correspondre à P_2, ...; P'_{2n+1} de s_{2n+1} que T_{2n+1} fait correspondre à P_{2n+1}. Les points P, P' se correspondent dans une transformation birationnelle de W_{2n+1} en elle-même. Cette transformation est déterminée, sur W_{2n+1}, par une homographie harmonique de l'espace ambiant. Cette homographie, que nous désignerons par T, possède deux axes ponctuels à $2^{2n}-1$ dimensions; σ_1, σ_2, rencontrant chacun la variété W_{2n+1} en 2^{2n} points, qui sont les points unis de l'involution I_2 engendrée par T sur W_{2n+1}.

Une hyperquadrique Q, unie pour l'homographie T, mais ne contenant pas les axes ponctuels de cette homographie, coupe W_{2n+1} suivant une variété V_{2n} d'ordre $2.(2n+1)!$, transformée en elle-même par T et ne possédant en général aucun point uni de cette homographie.

En projetant la variété V_{2n} de σ_2 sur σ_1 (ou de σ_1 sur σ_2), on obtient une variété Ω_{2n} image de l'involution engendrée sur V_{2n} par T. La variété Ω_{2n} est dépourvue de variété canonique, mais possède une variété bicanonique d'ordre zéro.

---

(1) Voir notre note « Sur les variétés appartenant à la variété de Segre représentant les points de n ponctuelles (*Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1938, pp. 520-526).

Pour $n=1$, la variété Ω_2 est la surface d'Enriques et l'on retrouve un résultat dû à M. Burniat [1].

De ce qui précède, nous pouvons conclure qu'*il existe des variétés algébriques ayant un nombre pair de dimensions, dépourvues de variété canonique, mais possédant une variété bicanonique d'ordre zéro.*

3. Envisageons maintenant une variété algébrique V_{2n+1} à $2n+1$ dimensions, possédant les mêmes caractères que la variété V_{2n} du n° 1 et contenant également une involution cyclique I_p, d'ordre p, privée de points unis. Soient encore $|F_1|, |F_2|, \ldots, |F_p|$ p systèmes linéaires partiels de variétés à $2n$ dimensions, composés au moyen de l'involution I_p et appartenant à un même système linéaire; $|\Phi_1|, |\Phi_2|, \ldots, |\Phi_p|$, les systèmes complets qui leur correspondent sur la variété Ω_{2n+1} image de l'involution I_p.

Supposons que sur une variété Φ_1, le système canonique soit découpé par les variétés Φ_2 Si p_g est le genre géométrique des variétés Φ_1, le système $|\Phi_2|$ a la dimension $p_g - 1$, le système $|\Phi_1|$ la dimension p_g+1 et les systèmes $|\Phi_3|, \ldots, |\Phi_p|$ la dimension p_g. Sur une variété Φ_2 le système canonique doit être découpé par les variétés $\Phi_1, \Phi_3, \ldots$ ou Φ_p et si p'_g est le genre géométrique de Φ_2, le système $|\Phi_2|$ doit avoir la dimension p'_g+1. On aurait donc $p'_g = p_g - 2$. Mais les variétés Φ_1 doivent découper sur Φ_2 un système de dimension $p'_g - 1$ ou p'_g, suivant que $|\Phi_1|$ est l'adjoint de $|\Phi_2|$ ou non. On aurait donc $p'_g = p_g + 2$ ou $p_g + 1$, ce qui est absurde.

On en conclut que l'adjoint de $|\Phi_1|$ doit être ce système lui-même; la variété Ω_{2n+1} possède donc une variété canonique d'ordre zéro. On a

$$|\Phi'_i| = |\Phi_i| \qquad (i = 1, 2, \cdots, p),$$

et les variétés $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi p$ ont le même genre géométrique.

D'ailleurs, on a en outre

$$|p\,\Phi_1| = |p\,\Phi_2| = \cdots = |p\,\Phi_p|.$$

---

(1) Note sur certaines variétés de Segre (*Bull. de l'Acad. roy de Belgique*, 1938, pp. 690-692); Recherches sur les surfaces de bigenre un (*Mém. de la Soc. roy des Sciences de Liége*, 1936, pp. 1-104); Sur une variété à trois dimensions associée à un tétraèdre (*Bull. des Sciences mathém.*, 1936, pp. 171-180).

Une involution cyclique appartenant à une variété algébrique V_{2n+1}, *privée de points unis a pour image une variété dont les variétés canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro.*

4. On peut encore, en utilisant les variétés de Segre, prouver l'existence des variétés précédentes.

Considérons la variété de Segre W_{2n}, qui représente les couples de points de deux espaces linéaires S'_n, S''_n à n dimensions. Cette variété appartient à un espace linéaire à $n(n+2)$ dimensions et est d'ordre $(2n)! : (n!)^2$. Nous avons démontré récemment que la section de W_{2n} par une hypersurface d'ordre $n+1$ est une variété V_{2n-1} dont les variétés canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro ([1]).

Soient T' une homographie de période $n+1$ de S'_n et T'' une homographie de même période de S''_n, ces deux homographies n'ayant qu'un nombre fini de points unis ($n+1$ pour chacune des homographies).

A un point P_1 de W_{2n} représentant le couple formé des points P'_1 de S'_n et P''_1 de S''_n, faisons correspondre le point P_2 représentant le couple formé du point P'_2 que T' fait correspondre à P'_1 et du point P''_2, que T'' fait correspondre à P'_2 Ainsi se trouve définie sur la variété W_{2n} une transformation birationnelle T, faisant correspondre P_2 à P_1, ayant la période $n+1$.

La transformation T est définie sur W_{2n} par une homographie de l'espace ambiant, possédant $n+1$ axes ponctuels à n dimensions, coupant chacun W_{2n} suivant $n+1$ points, unis pour l'involution engendrée par T.

Considérons maintenant une hypersurface d'ordre $n+1$ transformée en elle-même par T et ne contenant pas les axes de cette homographie. Elle découpe sur W_{2n} une variété V_{2n-1} sur laquelle T détermine une involution cyclique d'ordre $n+1$ privée de points unis. Si $n+1$ est premier, l'image de cette involution est une variété Ω_{2n-1} possédant des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.

Liége, le 1er janvier 1939.

(1) Sur les variétés de Segre représentant les couples de points de deux espaces à n dimensions (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1938, pp. 592-594).

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)