Sur les surfaces possédant une conique multiple,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Nous considérons dans cette note les surfaces de l'espace à quatre dimensions intersections d'une hyperquadrique et d'une hypersurface, ou, ce qui est la même chose, une surface de l'espace ordinaire d'ordre $2n$, ayant une conique multiple d'ordre n. Le système canonique d'une telle surface se détermine sans difficulté. Supposons que cette surface soit transformée en elle-même par une homographie cyclique de période p. Si l'on considère le modèle projectif de la surface ayant une conique multiple, cette homographie est une homologie dont le plan est celui de la conique. Les points-pinces de la surface situés sur cette conique et dont les plans tangents passent par le centre d'homologie sont les points unis de l'involution engendrée par l'homologie sur la surface. Nous construisons une surface image de cette involution dans les cas $p=2$, $p=3$.

Dans le cas $p=2$, la surface image est l'intersection d'une hyperquadrique, d'une hypersurface d'ordre n et du cône projetant d'une droite une surface de Veronese. Dans le cas $p=3$, on obtient une surface intersection d'une hyperquadrique, d'une hypersurface et du cône projetant d'une droite une surface dont les sections hyperplanes représentent les cubiques d'un plan. Dans les deux cas, les surfaces possèdent des points doubles, respectivement coniques ou biplanaires ordinaires. Nous construisons le système canonique de chacune de ces surfaces et nous montrons que la construction de ce système subsiste lorsque les points doubles disparaissent.

Citons, parmi les surfaces rencontrées, les suivantes :

Dans un espace à sept dimensions, l'intersection de deux hyperquadriques et du cône projetant d'une droite une surface de Veronese est une surface dont les sections hyperplanes sont les courbes bicanoniques.

Dans un espace à onze dimensions, l'intersection de deux hyperquadriques et du cône projetant d'une droite la surface dont les sections hyperplanes représentent les cubiques d'un plan est une surface dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques.

Le cas $p>3$ conduirait à la construction de surfaces analogues, appartenant au cône projetant d'une droite la surface représentant les courbes planes d'ordre p, à une hyperquadrique et à une hypersurface.

1. Considérons dans un espace S_4, à quatre dimensions, la surface F intersection d'une hyperquadrique V_3^2 et d'une hypersurface d'ordre n, V_3^n, irréductibles. Pour déterminer le système canonique de la surface F, projetons celle-ci sur un espace S_3 à partir d'un point de l'hyperquadrique V_3^2 n'appartenant pas à la surface. Aux sections hyperplanes de V_3^2 correspondent les quadriques de S_3 passant par une conique γ et, par conséquent, à la surface F correspond, birationnellement, une surface F′ d'ordre $2n$, passant n fois par la conique γ.

Sur la surface F′, le système canonique est découpé par les adjointes d'ordre $2n-4$ passant $n-1$ fois par γ. Ces surfaces sont formées du plan de γ compté deux fois et des surfaces d'ordre $2n-6$ passant $n-3$ fois par γ. Ces surfaces correspondent aux sections de V_3^2 par les hypersurfaces d'ordre $n-3$ de S_4. Ces hypersurfaces découpent donc sur F le système canonique de cette surface [1].

Si nous désignons par $|C|$ le système des sections hyperplanes de F, le système canonique est donc $|(n-3)C|$.

Pour évaluer le genre géométrique p_g de F. observons que l'on peut toujours disposer de la figure de référence de S_4 de manière que l'équation de V_3^2 soit

$$x_0 x_4 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3),$$

φ_2 étant une forme quadratique en x_1, x_2, x_3. Les équations de la conique γ dans l'espace $x_0=0$, le centre de projection étant le point $O_0(1, 0, 0, 0, 0)$, sont

$$x_4 = 0, \ \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

L'équation de la surface F′ peut alors s'écrire

$$x_4^{2n}\alpha_0 + x_4^{2n-1}\alpha_1 + \cdots + x_4^{2n-i}\alpha_i + \cdots + x_4^n\alpha_n + x_4^{n-1}\beta_{n-1}\varphi_2$$
$$+ x_4^{n-2}\beta_{n-2}\varphi_2^2 + \cdots + x_4^{n-i}\beta_{n-i}\varphi_2^i + \cdots + x_4\beta_1\varphi_2^{n-1} + \beta_0\varphi_2^n = 0,$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ sont des formes algébriques en x_1, x_2, x_3 dont le degré est indiqué par l'indice.

---

(1) On peut également déduire ce fait d'un théorème plus général que nous avons établi dans une note *Sur les surfaces algébriques intersections complètes d'hypersurfaces* parue en 1941 ou 1942 dans la *Revista* de l'Université de Tucuman, série A, Matematicas y Fisica teorica. Le procédé de démonstration était différent.

On en déduit l'équation de la variété V_3^n sous la forme

$$x_4^n\alpha_0 + x_4^{n-1}\alpha_1 + \cdots + x_4^{2n-i}\alpha_i + \cdots + \alpha_n$$
$$+ x_0\beta_{n-1} + x_0^2\beta_{n-2} + \cdots + x_0^i\beta_{n-i} + \cdots + x_0^{n-1}\beta_1 + x_0^n\beta_0 = 0.$$

En écrivant cette équation, on tient compte évidemment de celle de V_3^2.

L'équation d'une surface d'ordre $2n-6$ passant $n-3$ fois par γ s'écrit

$$x_4^{2n-6}\lambda_0 + \cdots + x_4^{2n-6-i}\lambda_i + \cdots + x_4^{n-3}\lambda_{n-3} + x_4^{n-4}\mu_{n-4}\varphi_2 + \cdots$$
$$+ x_4^{n-3-i}\mu_{n-3-i}\varphi_2^i + \cdots + \mu_0\varphi_2^{n-3} = 0,$$

où les λ_i et les μ_i sont des formes en x_1, x_2, x_3 dont le degré est indiqué par l'indice.

Le genre géométrique p_g de F est égal au nombre de termes de l'équation précédente. On a donc

$$p_g = \sum_{i=0}^{n-3}\frac{1}{2}(i+1)(i+2) + \sum_{i=0}^{n-4}\frac{1}{2}(i+1)(i+2) = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(2n-3).$$

Le genre p_g est aussi égal au nombre d'hypersurfaces linéairement indépendantes d'ordre $n-3$ de S_4, diminué du nombre d'hypersurfaces linéairement indépendantes d'ordre $n-5$; il peut aussi être calculé facilement par ce procédé.

2. Les sections hyperplanes C de la surface F, ou encore les sections de F′ par les quadriques passant par la conique γ sont de genre $(n-1)^2$. Il en résulte que le système canonique $|(n-3)C|$ de F a le degré $n(n-2)(n-3)^2$. Le genre linéaire de F est donc $p^{(1)} = n(n-2)(n-3)^2+1$.

Le système adjoint au système $|C|$ est le système $|(n-2)C|$, de dimension $\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$. Il comprend deux systèmes linéaires formés l'un par les courbes composées d'une courbe C déterminée et des courbes canoniques; l'autre de courbes qui ne contiennent pas la courbe C envisagée. Ce dernier système a la dimension $n(n-2)$ et par conséquent le système $|(n-2)C|$ découpe, sur une courbe C, la série canonique complète de celle-ci. La surface F est donc régulière.

La surface F présente les caractères

$$p_a = p_g = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(2n-3),\; p^{(1)} = n(n-2)(n-3)^2+1.$$

3. Supposons que la surface F soit transformée en elle-même par l'homographie harmonique H d'équations

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = -x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : -x_4,$$

ayant pour axes ponctuels la droite σ_1 d'équations $x_1=x_2=x_3=0$ et le plan σ_2, d'équations $x_0=x_4=0$. L'hyperquadrique V_3^2 est transformée en elle-même par H et pour qu'il en soit de même de l'hypersurface V_3^n, il faut que les formes α_{2i+1}, β_{2i+1} de degrés impairs soient identiquement nulles dans l'équation écrite plus haut.

L'homographie H engendre sur F une involution I_2 d'ordre 2. La droite σ_1 ne rencontre pas F. Le plan σ_2 rencontre cette surface en $2n$ points donnés par

$$\varphi_2=0,\ \alpha_n=0$$

si n est pair, ou bien suivant la conique $\varphi_2=0$, si n est impair.

Nous supposerons n pair et poserons $n=2p$. Dans ces conditions, l'involution I_2 possède un nombre fini, $2n=4p$, de points unis.

Il est intéressant de remarquer que sur la surface F', l'involution I_2 est engendrée par l'homologie harmonique

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4 = x_1 : x_2 : x_3 : -x_4.$$

Les points unis sont les points-pinces de la surface situés sur la courbe γ, le plan tangent passant par le centre d'homologie. Celle-ci transforme en elle-même la courbe tracée sur F' infiniment voisine de γ et aux points-pinces considérés, l'involution déterminée sur cette courbe par l'homologie possède des points unis.

L'équation des n plans tangents à F' en un point x de γ s'écrit

$$\alpha_n X_4^n + k_2\beta_{n-2}X_4^{n-2}\left(X_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}+X_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}\right)^2+\cdots$$
$$+k_n\beta_0\left(X_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}+X_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}\right)^n=0,$$

k_2, ..., k_n étant des coefficients numériques. Les points-pinces en question sont bien donnés par $\alpha_n=0$, $\varphi_2=0$.

4. Considérons les surfaces du quatrième ordre

$$\lambda_0 x_4^4 + x_4^2(\lambda_{11}x_1^2+\lambda_{22}x_2^2+\cdots+\lambda_{23}x_2x_3)+\lambda_1\varphi_2^2=0,$$

passant deux fois par γ et transformées en elles-mêmes par l'homologie. Rapportons projectivement ces surfaces aux hyperplans d'un espace linéaire S_7 à sept dimensions en posant

$$\rho X_0 = x_4^4,\ \rho X_{ik}=x_4^2x_ix_k,\ \rho X_1=\varphi_2^2 \qquad (i,k=1,2,3).$$

L'élimination des x entre ces équations donne les équations que l'on obtient en écrivant que le déterminant

$$\left.\begin{Vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{31} \\ X_{12} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{23} & X_{33} \end{Vmatrix} = 0 \quad\right\} \tag{1}$$

est de caractéristique un, et l'équation

$$X_0 X_1 = F_1^2, \tag{2}$$

en désignant par F_1 ce que devient φ_2 lorsque l'on y remplace $x_i x_k$ par X_{ik}.

Les équations (1) représentent le cône $V_4{}^4$, à quatre dimensions, projetant de la droite $X_{ik}=0$ une surface de Veronese appartenant à l'espace $X_0=X_1=0$. L'équation (2) représente une hyperquadrique et l'ensemble des équations (1), (2) représente une variété $V_3{}^8$ image de l'involution engendrée par l'homologie dans l'espace (x_1, x_2, x_3, x_4).

Au centre de l'homologie correspond sur la variété $V_3{}^8$ le domaine du point $X_1=X_{ik}=0$; ce point est quadruple pour la variété, le cône tangent étant le cône projetant du point de contact la surface de Veronese (1).

Au plan $x_4=0$ de l'homologie correspond sur la variété $V_3{}^8$ le domaine du point $X_0=X_{ik}=0$; ce point est quadruple pour la variété et le cône tangent est le cône projetant du point la surface de Veronese (1).

A la conique γ_2 correspond la section de la surface (1) par l'espace à quatre dimensions

$$X_0 = 0,\ X_1 = 0,\ F_1 = 0.$$

C'est une courbe rationnelle γ' du quatrième ordre le long de laquelle la variété $V_3{}^8$ touche l'hyperplan $F_1=0$.

Les quadriques passant par γ forment deux systèmes, à savoir

$$x_4(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) = 0,\ x_4^2 + \lambda\varphi_2 = 0.$$

Aux premières correspondent les sections de la variété $V_3{}^8$ par les cônes $V_3{}^2$ projetant de la droite $X_{ik}=0$ les coniques de la surface de Veronese (1). Aux secondes correspondent les sections de la variété $V_3{}^8$ par les hyperplans

$$X_0 + 2\lambda F_1 + \lambda^2 X_1 = 0; \tag{3}$$

le système formé par ces hyperplans a pour enveloppe l'hyperquadrique (2), de sorte que chacun de ces hyperplans touche $V_3{}^8$ en chaque point d'intersection. La courbe γ' appartient à toutes ces sections.

On observera que l'hyperquadrique (2) est un cône ayant pour sommet un espace à quatre dimensions $X_0 = X_1 = F_1 = 0$.

5. Reprenons la surface F'; l'image de l'involution I_2 appartenant à cette surface est une surface Φ tracée sur la variété $V_3{}^8$.

L'équation de la surface F' s'écrit

$$\begin{gathered} x_4^{4p}\alpha_0 + x_4^{4p-2}\alpha_2 + \cdots + x_4^{4p-2i}\alpha_{2i} + \cdots + x_4^{2p}\alpha_{2p} \\ + x_4^{2p-2}\beta_{2p-2}\varphi_2^2 + \cdots + x_4^{2p-2i}\beta_{2p-2i}\varphi_2^{2i} + \cdots + \beta_0\varphi_2^{2p} = 0 \end{gathered}$$

En remplaçant dans α_{2i}, β_{2i}, $x_i x_k$ par X_{ik}, nous obtiendrons des formes de degré i que nous désignerons par A_i, B_i. L'équation précédente donne alors

$$\left.\begin{gathered} X_0^p\alpha_0 + X_0^{p-1}A_1 + \cdots + X_0^{p-i}A_i + \cdots + A_p \\ + X_1 B_{p-1} + \cdots + X_1^i B_{p-i} + \cdots + X_1^p\beta_0 = 0. \end{gathered}\right\} \quad (4)$$

La surface Φ est donc l'intersection de la variété $V_3{}^8$ et d'une hypersurface d'ordre p. On vérifie aisément que c'est l'intersection complète de ces variétés; Φ est donc d'ordre $8p$.

Entre les genres arithmétiques p_a, π_a de F, Φ et le nombre τ des points unis de l'involution, nous avons la relation (²)

$$12(p_a + 1) = 24(\pi_a + 1) - 3\tau;$$

d'où, puisque $\tau = 4p$, la valeur de p_a ayant été donnée plus haut,

$$\pi_a = \frac{1}{3}(p-1)(4p^2 - 5p + 3).$$

La surface F étant régulière, il en est de même de Φ. D'autre part, le genre linéaire de Φ est égal à $\frac{1}{2}(p^{(1)} - 1) + 1$. La surface Φ présente donc les caractères

$$p_a = p_g = \frac{1}{3}(p-1)(4p^2 - 5p + 3), \quad p^{(1)} = 2p(p-1)(2p-3)^2 + 1.$$

Les courbes C découpées sur F' par les quadriques passant par γ sont de genre $(2p-1)^2$ et forment un système linéaire de degré $4p$. Nous avons indiqué tantôt deux systèmes de quadriques passant par γ et transformés en eux-mêmes par l'homologie. Aux courbes C découpées sur F' par les quadriques du premier système correspondent sur Φ des courbes Γ de genre $2p(p-1)+1$ formant un réseau $|\Gamma|$ de degré $2p$.

(²) Voir notre Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914, pp. 289-312).

Les points de diramation de la surface Φ sont les points d'intersection de la courbe γ' et de l'hypersurface V_6^p d'équation (4). Ce sont $4p$ points doubles coniques pour la surface. Les hyperplans (3) touchent la surface Φ suivant des courbes Γ_0 passant par ces points et formant un faisceau. Les courbes Γ_0 sont de genre $(p-1)(2p-1)$.

Chacun des points de diramation de la surface Φ est équivalent à une courbe rationnelle δ de degré -2. Si nous désignons par Δ la somme de ces $4p$ courbes, nous avons

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_0 + \Delta.$$

Le système complet $|2\Gamma|$ est constitué par les sections hyperplanes de Φ.

6. Le système canonique de Φ a pour homologue, sur F', le système linéaire découpé par les adjointes d'ordre $4p-6$, transformées en elles-mêmes par l'homologie et ne passant pas par les points unis de I_2. Un premier système d'adjointes, d'ordre $4p-6$, transformées en elles-mêmes par l'homologie, a pour équation

$$\begin{gathered}x_4^{4p-6}\lambda_0 + x_4^{4p-8}\lambda_2 + \dots + x_4^{4p-6-2i}\lambda_{2i} + \dots + x_4^{2p-2}\lambda_{2p-4} \\ + x_4^{2p-4}\mu_{2p-4}\varphi_2 + \dots + x_4^{2p-4-2i}\mu_{2p-4-2i}\varphi_2^{2i+1} + \dots + x_4^2\mu_2\varphi_2^{2p-5} + \mu_0\varphi_2^{2p-3} = 0,\end{gathered}$$

où les coefficients sont variables.

Désignons par L_i, M_i les polynômes de degré i déduits de λ_{2i}, μ_{2i} en y posant $x_i x_k = X_{ik}$. L'équation précédente donne

$$\left.\begin{aligned}X_0^{p-1}\lambda_0 + X_0^{p-2}L_1 + \dots + X_0^{p-1-i}L_i + \dots + X_0 L_{p-2} \\ + F_1(M_{p-2} + \dots + X_1^i M_{p-2-i} + \dots + X_1^{p-3}M_1 + \mu_0 X_1^{p-2}) = 0.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Ces hypersurfaces passent par les points de diramation de la surface Φ et ne découpent donc pas le système canonique de cette surface.

Le second système d'adjointes d'ordre $4p-6$, transformées en elles-mêmes par l'homologie, a pour équation, après supression du facteur x_4,

$$\begin{gathered}x_4^{4p-8}\lambda_1 + \dots + x_4^{4p-8-2i}\lambda_{2i+1} + \dots + x_4^{2p-4}\lambda_{2p-3} \\ x_4^{2p-6}\mu_{2p-5}\varphi_2^2 + \dots + x_4^{2p-4-2i}\mu_{2p-3-2i}\varphi_2^{2i} + \dots + \mu_1\varphi_2^{2p-4} = 0.\end{gathered}$$

Désignons par L'_i, M'_i les polynômes obtenus en remplaçant dans λ_i, μ_i, les coordonnées x_1, x_2, x_3 respectivement par X_{11}, X_{12}, X_{13}. L'équation précédente donne

$$X_0^{p-2} X_{11}^{p-2} L_1' + ... + X_0^{p-2-i} X_{11}^{p-2-i} L_{2i+1}' + ... + L_{2p-3}'$$
$$+ X_1 X_{11} M_{2p-5}' + ... + X_1^i X_{11}^i M_{2p-3-2i}' + ... + X_1^{p-2} X_{11}^{p-2} M_1' = 0.$$

C'est une hypersurface d'ordre $2p-3$, passant $2p-3$ fois par le cône projetant de la droite $X_{ik}=0$ la conique

$$X_{11} = X_{12} = X_{13} = 0, \; X_{22} X_{33} - X_{23}^2 = 0.$$

Il en résulte que le système canonique de Φ est $|(2p-3)\Gamma|$.

Les hypersurfaces (5) découpent sur Φ le système $|(2p-4)\Gamma+\Gamma_0|$.

7. La surface Φ de S_7, intersection de la variété V_4^4, d'une hyperquadrique (conique) et d'une hypersurface d'ordre p, possède $4p$ points doubles coniques. La disparition de ces singularités ne modifie pas les caractères de la surface ni la construction canonique, comme nous allons le montrer.

Soient dans S_7, s_1 une droite, s_5 un espace linéaire à cinq dimensions ne rencontrant pas la droite, Ψ une surface de Veronese appartenant à s_5; V_6^2 une hyperquadrique et V_6^p une hypersurface d'ordre p situées d'une manière générale. Le cône V_4^4 projetant Ψ de s_1, V_6^2 et V_6^p ont en commun une surface Φ d'ordre $8p$. Nous désignerons par ε les coniques tracées sur la surface Ψ et par V_3^2 les cônes qui les projettent de la droite s_1. Ces cônes coupent la surface Φ suivant des courbes que nous désignerons par Γ; les sections hyperplanes de Φ forment le système $|2\Gamma|$. Observons que le système $|L|$ est de degré $2p$, les points communs à deux courbes Γ situées sur les cônes projetant de s_1 les coniques ε_1, ε_2 de Ψ, ont en commun les $2p$ points appartenant à V_6^2, V_6^p, situés dans le plan passant par s_1 et le point commun à ε_1, ε_2.

La droite s_1 et une conique ε déterminent un espace à quatre dimensions S_4, coupant V_6^2, V_6^p suivant des hypersurfaces $V_3'^2$, V_3^p. Le cône V_3^2 projetant ε de s_1, $V_3'^2$ et V_3^p ont en commun une courbe Γ. Projetons Γ sur un espace à trois dimensions S_3 à partir d'un des points d'intersection P de s_1 et de $V_3'^2$. Cette hyperquadrique est représentée point par point sur S_3. A la section de $V_3'^2$ par V_3^p correspond une surface V_2^{2p} ayant une conique γ multiple d'ordre p. A la section de $V_3'^2$ correspond un cône de second degré V_2^2. A la courbe Γ correspond la courbe Γ' d'ordre $4p$, section de V_2^{2p} par V_2^2.

Pour évaluer le genre de Γ', on peut imaginer que le cône V_2^2 se déforme d'une manière continue jusqu'à se réduire à deux plans. Les sections planes de V_2^{2p} étant de genre $(p-1)^2$, la courbe Γ' est de genre $2p(p-1)+1$.

Le système canonique complet de Γ' est découpé par les surfaces d'ordre $2p-2$ passant $p-1$ fois par γ. Parmi ces surfaces se trouvent celles qui sont formées du plan de γ compté $p-1$ fois et de cônes d'ordre $n-1$ ayant le même sommet que V_2^2. Il en résulte que les groupes de $2(p-1)$ génératrices de V_2^2 découpent des groupes canoniques sur Γ'.

En retournant à la courbe Γ, on voit que les groupes de $2(p-1)$ plans passant par s_1 et rencontrant Γ découpent des groupes canoniques. Cela étant, sur la surface Φ, les groupes de $2(p-4)$ courbes du réseau $|\Gamma|$ découpent des groupes canoniques sur une courbe de ce réseau. L'adjoint au système $|\Gamma|$ est donc

$$|\Gamma_a| = |(2p-2)\Gamma|.$$

car le réseau $|\Gamma|$ est dépourvu de courbes fondamentales.

Le système canonique de Φ est donc le système $|(2p-3)\Gamma|$ comme dans le cas particulier où Φ possède $4p$ points doubles coniques.

8. Le cas particulier $p=2$ présente un certain intérêt. Dans ce cas, le système canonique de la surface Φ est le réseau $|\Gamma|$ et on a $p_a=p_g=3$, $p^{(1)}=5$.

Le système des sections hyperplanes de Φ est le système bicanonique $|2\Gamma|$ et on a $P_2=8$. On obtient ainsi un modèle bicanonique d'une surface algébrique.

Quel que soit p, le système canonique est découpé sur Φ par les hypersurfaces d'ordre $p-1$ passant par une courbe Γ. Le système bicanonique est découpé par les hypersurfaces d'ordre $4p-6$.

9. Nous allons maintenant supposer que la surface F est transformée en elle-même par une homographie H de période trois, d'équations

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = \varepsilon^2 x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : \varepsilon x_4,$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. Nous poserons $n=3p$ et nous supposerons que dans l'équation de la surface F, les polynômes α_i, β_i dont les degrés ne sont pas multiples de trois, sont identiquement nuls.

L'homographie H engendre, sur la surface F, une involution I_3 d'ordre trois possédant $6p$ points unis, donnés par $x_0=0$, $x_4=0$, $\alpha_{3p}=0$, $\varphi_2=0$. Cette homographie possède en effet trois axes ponctuels : le point $O_0\,(x_1=\ldots=x_4=0)$, le point $O_4\,(x_0=\ldots=x_3=0)$ et le plan $\sigma_2\,(x_0=x_4)=0$. Ce sont les points de rencontre de σ_2 avec F qui donnent les points unis de l'involution, cette surface ne passant pas par les points O_0, O_4.

La surface F′ a pour équation

$$x_4^{6p}\alpha_0+\ldots+x_4^{6p-3i}\alpha_{3i}+\ldots+x_4^{3p}\alpha_{3p}+x_4^{3p-3}\beta_{3p-3}\varphi_2^3+\ldots$$
$$+\,x_4^{3p-3i}\beta_{3p-3i}\varphi_2^i+\ldots+\beta_0\varphi_2^{3p}=0.$$

Sur F′, l'involution I_3 est engendrée par l'homologie H′ d'équations

$$x_1':x_2':x_3':x_4'=x_1:x_2:x_3:\varepsilon x_4.$$

On peut voir, comme dans le cas précédent, que sur F′, les points unis de l'involution sont donnés par les points-pinces de la surface appartenant à la courbe γ, le plan tangent passant par le centre de l'homologie H′.

Pour obtenir une surface image Φ de l'involution I_3, considérons les surfaces

$$\lambda_0x_4^6+x_4^3(\lambda_{111}x_1^3+\ldots+\lambda_{123}x_1x_2x_3)+\lambda_1\varphi_2^3=0,$$

qui sont transformées en elles-mêmes par H′. Rapportons projectivement ces surfaces aux hyperplans d'un espace linéaire S_{11} à onze dimensions en posant

$$\rho X_0=x_4^6,\ \rho X_{ikl}=x_ix_kx_lx_4^3,\ \rho X_1=\varphi_2^3,\ (i,k,l=1,2,3). \qquad (1)$$

En remplaçant dans $\varphi_2{}^3$ les produits $x_ix_kx_l$ par X_{ikl}, on obtient un polynôme du second degré que nous désignerons par F_2. On tire alors des équations (2)

$$X_0X_1=F_2, \qquad (2)$$

et les équations que l'on obtient en exprimant que la matrice

$$\left.\begin{Vmatrix} X_{111} & X_{221} & X_{331} & X_{123} & X_{113} & X_{112} \\ X_{112} & X_{222} & X_{332} & X_{223} & X_{123} & X_{221} \\ X_{113} & X_{223} & X_{333} & X_{332} & X_{331} & X_{123} \end{Vmatrix}=0\ \right\} \qquad (3)$$

est de caractéristique un.

Les équations (3) représentent le cône $V_4{}^9$ projetant de la droite s_1 d'équations $X_{ikl}=0$ une surface de Veronese généralisée, Ψ, image du système des cubiques d'un plan située dans l'espace σ_9 à 9 dimensions donné par $X_0=X_1=0$.

L'équation (2) représente une hyperquadrique coupant le cône V_4^9 suivant une variété V_3^{18} à trois dimensions, dont les points représentent les ternes de points de l'involution engendrée par H' dans l'espace (x_1, x_2, x_3, x_4).

Aux points de rencontre de la droite s_1 avec l'hyperquadrique (2), la variété V_3^{18} possède des points multiples d'ordre neuf, dont les domaines représentent l'un le domaine du centre de l'homologie, l'autre le plan $x_1=0$. A la conique γ correspond sur V_3^{18} une courbe du sixième ordre, tracée sur la surface Ψ, le long de laquelle l'hyperquadrique (2) a un contact du second ordre avec cette surface.

Désignons par A_i, B_i ce que deviennent α_{3i}, β_{3i} lorsque l'on y remplace $x_i x_k x_l$ par X_{ikl} (polynômes de degré i). De l'équation de F' on déduit

$$X_0^p \alpha_0 + \ldots + X_0^{p-i} A_i + \ldots + A_p + X_1 B_{p-1} + \ldots + X_1^i B_{p-i} + \ldots + X_1^p \beta_0 = 0.$$

C'est l'équation d'une hypersurface d'ordre p coupant V_3^{18} suivant la surface Φ. Celle-ci est donc d'ordre $18p$; elle coupe la sextique γ' homologue de γ en $6p$ points qui sont, comme on sait, doubles biplanaires ordinaires pour la surface.

10. Entre les genres arithmétiques p_a, π_a de F, Φ, les genres linéaires $p^{(1)}$, $\pi^{(1)}$ de ces surfaces et le nombre $6p$ des points unis de I_3, on a les relations [3]

$$12(p_a+1) = 36(\pi_a+1) - 8.6\,p, \quad p^{(1)} - 1 = 3(\pi^{(1)} - 1).$$

D'autre part, Φ est, comme F, régulière. Les caractères de la surface Φ sont donc

$$p_a = p_g = \frac{1}{2}(2p-1)(3p^2-3p+2), \quad \pi^{(1)} = p(3p-2)(3p-3)^2+1.$$

Parmi les adjoints d'ordre $6p-6$ à la surface F', considérons le système

$$x_4^{6p-6}\lambda_0 + \ldots + x_4^{6p-6-3i}\lambda_{3i} + \ldots + x_4^{3p-3}\lambda_{3p-3} + x_4^{3p-6}\mu_{3p-6}\varphi_2^3 + \ldots$$
$$+ x_4^{3p-3-3i}\mu_{3p-3-3i}\varphi_2^{3i} + \ldots + \mu_0\varphi_2^{3p-3} = 0,$$

qui découpe sur F' un système appartenant à l'involution I_3.

Appelons L_i, M_i les polynômes de degré i obtenus en posant

---

(3) Voir notre mémoire Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique (*Bull. de la Soc. Math. de France*, 1919, pp. 1-16).

$x_i x_k x_l = X_{ikl}$ dans λ_{3i}, μ_{3i}. Au système précédent correspond dans S_{11} le système d'hypersurfaces

$$X_0^{p-1}\lambda_0 + \dots + X_0^{p-1-i}L_i + \dots + L_{p-1} + X_1 M_{p-2} + \dots + X_1^i M_{p-1-i}$$
$$+ \dots + X_1^{p-1}\mu_0 = 0.$$

Ce système découpe sur Φ le système canonique.

Soient k les cubiques gauches, formant un réseau, tracées sur Ψ, V_3^3 les cônes projetant ces cubiques de la droite s_1. Ces cônes coupent la surface Φ suivant des courbes Γ qui correspondent aux courbes C découpées sur F′ par les quadriques

$$x_4(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3) = 0,$$

passant par γ et transformées en elles-mêmes par H′. Il en résulte, d'après la formule de Zeuthen, que les courbes Γ sont de genre $3p^2-2p+1$. Ces courbes forment un réseau de degré $2p$, les points communs à deux courbes Γ étant situés dans un plan passant par s_1 et par un point de Ψ.

De ce qui précède on conclut que le système des sections hyperplanes de Φ est $|3\Gamma|$ et le système canonique, $|3(p-1)\Gamma|$.

11. La surface Φ conserve les mêmes caractères lorsque l'on supprime les $6p$ points biplanaires qu'elle possède. D'une manière précise, nous démontrerons qu'une surface, que nous désignerons encore par Φ, intersection du cône V_4^3, d'une hyperquadrique V_{10}^2 et d'une hypersurface V_{10}^p d'ordre p, dans S_{11}, a comme système canonique le système découpé par les hypersurfaces d'ordre $p-1$.

A cette fin, nous déterminerons le système adjoint au réseau $|\Gamma|$ des courbes découpées sur Φ par les cônes V_3^3 projetant de la droite s_1 les cubiques gauches tracées sur Ψ.

Une cubique gauche k de Ψ et la droite s_1 déterminent un espace linéaire à cinq dimensions S_5, contenant le cône V_3^3 et coupant V_{10}^2 et V_{10}^p suivant des variétés V_4^2, V_4^p. Projetons la figure d'un des points communs à s_1 et à V_4^2 sur un espace S_4. A l'intersection de V_4^2 et de V_4^p correspond une variété V_3^{2p} passant p fois par une quadrique Q; au cône V_3^3 correspond un cône cubique V_2^3, projetant d'un point P n'appartenant pas à V_3^{2p} une cubique gauche. A la courbe Γ tracée sur V_3^3 correspond la courbe Γ' intersection de V_3^{2p} et de V_2^3.

Faisons varier d'une manière continue le cône V_2^3 de manière à le réduire à trois plans passant par P, l'un de ces plans rencontrant les deux autres suivant des droites. La courbe Γ'

tend vers une courbe formée de trois sections planes de V_3^{2p}, une de ces sections rencontrant les deux autres chacune en $2p$ points. La courbe Γ est donc de genre $3p^2-2p+1$.

Le cône V_2^3 peut être représenté sur un plan σ de telle sorte qu'à ses sections hyperplanes correspondent les cubiques planes χ ayant un point double P à tangentes fixes p_1, p_2. A la courbe Γ' correspond dans σ une courbe Γ'' d'ordre $6p$, ayant un point multiple d'ordre $4p$ en P, des points multiples d'ordre p infiniment voisins de P sur p_1, p_2 et enfin six points multiples d'ordre p correspondant aux points de Γ' situés sur Q. Ces points sont situés sur une cubique χ_1 passant deux fois par P en y touchant p_1, p_2. Les adjointes de Γ'' sont des courbes d'ordre $6p-3$ comprenant les droites p_1, p_2 et complétées par les courbes d'ordre $6p-5$ passant $4p-3$ fois par P, ayant deux points multiples d'ordre $2p-2$ infiniment voisins de P sur p_1, p_2, six points multiples d'ordre $p-1$ aux points simples de Γ''. Parmi ces adjointes se trouvent les courbes formées de la cubique χ_1 comptée $p-1$ fois et de $3p-2$ droites passant par P. Comme χ_1 ne rencontre pas Γ'' en dehors des points multiples de celle-ci, les $3p-2$ droites déterminent sur Γ'' un groupe canonique. Il en résulte que sur Γ les plans projetant de s_1 un groupe de $3p-2$ points de k découpent un groupe canonique.

Retournons à la surface Φ. Les $2p$ points communs à deux courbes Γ sont situés sur un plan du cône V_4^9, par conséquent l'adjoint au système $|\Gamma|$ est donné par

$$|\Gamma_a| = |(3p-2)\Gamma|.$$

On en couclut que le système canonique de Φ est $|3(p-1)\Gamma|$. Comme les sections hyperplanes de Φ sont les courbes 3Γ, le système canonique est découpé sur Φ par les hypersurfaces d'ordre $p-1$.

12. Supposons $p=1$. Le système canonique de Φ est d'ordre zéro et la surface est de genres un ($p_a=P_4=1$). C'est l'intersection, dans S_{10}, du cône projetant Ψ d'un point et d'une hyperquadrique. La surface Φ est équivalente à un plan double ayant une sextique de diramation.

Supposons $p=2$. Le système canonique de Φ est $|3\Gamma|$; c'est le système des sections hyperplanes et Φ est dans ce cas une surface projectivement canonique. Elle présente les caractères

$$p^a = p_g = 12, \; p^{(1)} = 37.$$

Ce résultat pourrait se déduire d'un théorème de M. Enriques, à savoir que la section par une hyperquadrique d'une variété à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$), est une surface projectivement canonique [4].

La section du cône V_4^9 par une hyperquadrique est, d'après ce qu'on vient d'établir, une variété à trois dimensions V_3^{18} dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres ùn. Par conséquent, la section par une hyperquadrique de la variété V_3^{18} est une surface projectivement canonique.

Liége, le 31 mai 1943.

(4) ENRIQUES-CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teorica delle superficie algebriche* (Padoue, 1932). Voir p. 338.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)

No Réf. 2019